Tema 7: INTRODUCCIÓN A LOS CONTRASTES DE HIPÓTESIS PARAMÉTRICOS Y TEST DE BONDAD DE AJUSTE.

1 Introducción

El objetivo de los contrastes de hipótesis estadísticos no es otro que el de desarrollar procedimientos que nos permitan aceptar o rechazar una hipótesis que se emite acerca de un parámetro u otra característica de la población como puede ser el modelo teórico asociado a la variable con la que trabajamos. Así, podemos distinguir dos grandes grupos:

- **Pruebas de HIPÓTESIS paramétricas.** Si suponemos que la v.a. poblacional X tiene una distribución de probabilidad conocida $f_\theta(x)$, donde θ es el parámetro poblacional desconocido, estas técnicas nos permitan aceptar o rechazar una hipótesis que se emite acerca del parámetro θ a partir de la información proporcionada por una muestra extraída de la población X.

- **Test de bondad de ajuste** cuyo objetivo es determinar si los datos se ajustan a una determinada distribución, esta distribución puede estar completamente especificada (hipótesis simple) o dependiente de uno o varios parámetros (hipótesis compuesta).

En todos estos problemas existe una población en estudio y el modelo matemático que se crea para el estudio de estos problemas, presupone la existencia de una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad (conocida o no) depende de un cierto parámetro conocido o desconocido y sobre estas bases establecemos una prueba estadística para determinar la validez o no de ciertas suposiciones. **Nosotros, en un primer momento nos ocuparemos de los contrastes de hipótesis encaminados a la obtención o estudio de los distintos parámetros poblacionales. En una segunda etapa desarrollaremos procedimientos que nos permitar avalar o descartar la suposicón sobre el modelo teórico asociado a la población.**

`Ejemplo1:` Un investigador en medicina puede proponer que un nuevo fármaco es más eficaz que otro para curar una enfermedad. Para probar su teoría, selecciona al azar un grupo de pacientes afectados por la enfermedad y los divide aleatoriamente en dos grupos. Se aplica el nuevo medicamento a uno de los grupos y el medicamente antiguo a los pacientes del segundo grupo. Posteriormente, el investigador debe decidir, basado en el número de pacientes curados en cada uno de los dos grupos, si el nuevo fármaco es más eficaz o no que el anterior.

`Ejemplo2:` Podemos suponer que la duración asociada a las bombillas de un cierto fabricante sigue una distribución normal de media 1800 y de varianza 30 horas, y pretendemos realizar alguna investigación para saber si esta hipótesis o proposición sobre el modelo asociado es verdadera o falsa, es decir, podemos tomar la decisión de aceptar o rechazar la hipótesis de que la distribución normal sea correcta para modelizar la duración de dichas bombillas.

En muchos aspectos el procedimiento formal de las Pruebas (o test) de Hipótesis es similar al método científico. Las etapas fundamentales en todo contraste de hipótesis son las siguientes:

1. Se formula una suposición (hipótesis) sobre la población objeto de estudio.
2. Selecciona una muestra de la población
3. Comprueba si los datos están o no de acuerdo con la hipótesis planteada, es decir compara la observación con la teoría:
   (a) Si lo observado es incompatible con lo teórico entonces se rechaza la hipótesis planteada.
   (b) Si por el contrario lo observado es compatible con lo teórico entonces no podemos rechazar la hipótesis planteada y por tanto asumiremos que la hipótesis es cierta.

Nota.- Resulta importante destacar que el **"no rechazar"** la hipótesis planteada no es equivalente a **"demostrar"** que dicha hipótesis es cierta.

2 Elementos básicos de un Contraste de Hipótesis.

- **Hipótesis estadística**: Afirmación que se hace sobre el valor del parámetro poblacional u otra característica de la población objeto de estudio. La formulación de la hipótesis que se quiere contrastar implica establecer dos hipótesis mutuamente excluyentes que se denominan:
  - **Hipótesis nula=H$_0$** (Se asume cierta mientras no se es capaz de demostrar su falsedad).
  - **Hipótesis alternativa=H$_1$**(Hipótesis complementaria a H$_0$).
- La **terminología de aceptar y rechazar una hipótesis estadística** debe quedar clara:
  - **Rechazar la hipótesis** significa concluir que ésta es falsa en virtud de la información obtenida a partir de una muestra **(conclusión fuerte)**.
  - **Aceptar la hipótesis** significa que no se tiene suficiente información para rechazarla y, por lo tanto, se acepta **(conclusión débil)**.

  Aunque se habla de probar la hipótesis nula, hay que tener presente que el **OBJETIVO del estudio es:**

Demostrar el fundamento de la hipótesis alternativa
si tal fundamento se justifica.

- **Regla de decisión:**
  - Se seleciona una m.a.s. de la v.a. poblacional, $X_1, X_2, ..., X_n$, y se define el **Estadístico del contraste,** $T = T(X_1, X_2, ..., X_n)$.

- Definiremos una **Zona Crítica o de Rechazo**$\equiv R$: formada por todos aquellos valores del estadístico de contraste que por ser excesivamente grandes o pequeños resultan poco probable que ocurran cuando H_0 es verdadera.
- Calcularemos el valor concreto que toma el estadístico para la realización muestral que tengamos, $T(x_1, x_2, ..., x_n) = t_0$, $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} t_0 \in R \Rightarrow & \begin{cases} \text{Rechazaré } H_0 \text{ y diremos que} \\ \text{los datos apoyan la hipótesis alternativa.} \end{cases} \\ \\ t_0 \notin R \Rightarrow & \begin{cases} \text{Aceptaré } H_0 \text{ y diremos que los datos} \\ \\ \text{no presentan argumento en contra de } H_0. \end{cases} \end{cases}.$$

- **Tipos de errores**: Sin embargo, tanto en el caso de aceptar como de rechazar podemos estar sujetos a equivocarnos, es decir a rechazar una hipótesis siendo verdadera o bien aceptarla siendo falsa. Como se muestra en la siguiente tabla, existen cuatro posibles conclusiones:

		H_0 **VERDADERA**	H_0 **FALSA**
Decisión	**ACEPTA** H_0	Decisión CORRECTA	**ERROR TIPO II**
	RECHAZAR H_0	**ERROR TIPO I**	Decisión CORRECTA

Cada uno de estos dos errores tiene asociada una probabilidad que se denota por:

$$\boxed{\alpha = P(\textbf{ERROR TIPO I}) = P(\text{Rechazar } H_0 \ / \ H_0 \text{ Cierta})}$$

se le llama **nivel de significación del test** y se identifica con el área de la región de rechazo, ya que mide, en cierta manera, el peso de la evidencia a favor del rechazo de la hipótesis nula.

$$\boxed{\beta = P(\textbf{ERROR TIPO II}) = P(\text{Aceptar } H_0 \ / \ H_0 \text{ Falsa})}$$

De donde,

$$\boxed{1 - \alpha = P(\text{Aceptar } H_0 \ / \ H_0 \text{ Cierta})}$$

se le llama **nivel de confianza del test**, y

$$\boxed{1 - \beta = P(\text{Rechazar } H_0 \ / \ H_0 \text{ Falsa})}$$

se le llama **Potencia de la prueba** ya que representa la probabilidad de rechazar de manera correcta una hipótesis que es falsa.

El **test óptimo** sería aquel en el que $\alpha = \beta = 0$. Pero para un tamaño muestral fijo, cuando disminuye la probabilidad de cometer uno de los dos errores aumenta la probabilidad de cometer el otro tipo de error. El tratamiento de ambos errores no es el mismo, es decir, un error tiene más importancia que el otro. El `ejemplo` típico es el de un juicio, donde

$$H_0 \equiv \text{“el acusado es inocente”}$$

$$H_1 \equiv \text{“el acusado es culpable”}$$

por lo que,

error tipo I $\equiv$ “CONDENAR al acusado siendo INOCENTE”

error tipo II $\equiv$ “ABSOLVER al acusado siendo CULPABLE”

Como es más grave cometer un error tipo I que un error tipo II, el criterio que se sigue es fijar una cota para la probabilidad de error tipo I antes de efectuar el test y elegir, de entre todos los test que verifican esta condición, aquel que minimice la probabilidad de error tipo II (**Test uniformemente más potente** a nivel de significación α). Como información, es preciso destacar que no siempre existe este tipo de contraste.

3 Procedimiento para realizar un Contraste de Hipótesis

1. Formulamos la hipótesis nula y la alternativa:

$$\begin{cases} H_0 : \\ \\ H_1 : \end{cases}$$

2. Fijamos la probabilidad del error tipo I, α. Es frecuente fijar

$$\alpha = 0.1,\ 0.05,\ 0.01 \Rightarrow 90\%,\ 95\% \text{ o } 99\%, \text{ respectivamente, de confianza}$$

3. Definimos el estadístico de contraste $T = T(X_1, X_2, ..., X_n)$ cuya distribución de probabilidad es conocida bajo la hipótesis de que H_0 es verdadera.

4. Definiremos una **Zona Crítica o de Rechazo**$\equiv R$ utilizando la distribución de probabilidad $T(X_1, X_2, ..., X_n)$ y α, es decir,

$$\alpha = P(T(X_1, X_2, ..., X_n) \in R \ / \ H_0 \text{ es cierta})$$

5. Calcularemos el valor concreto que toma el estadístico para la realización muestral que tengamos, $T(x_1, x_2, ..., x_n) = t_0$, $\Longrightarrow$

$$t_0 \ \in \ R \Rightarrow \begin{cases} \text{Rechazaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza} \\ \\ \text{y diremos que los datos apoyan la } H_1. \end{cases}$$

$$t_0 \ \notin \ R \Rightarrow \begin{cases} \text{Aceptaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza} \\ \\ \text{y diremos que los datos no presentan argumento en contra de } H_0. \end{cases}$$

6. Conclusiones de naturaleza no estadística.

3.1 El $p - valor$ o nivel crítico de la prueba

A pesar de que se recomiendan valores pequeños para α, la selección del valor de α para aplicarlo a un análisis es algo arbitrario. Además, es claro que, el resultado final del test depende a qué nivel de significación se trabaje. Esto es, con una misma muestra, podemos rechazar H_0 con $\alpha = 0.05$ y aceptarla con $\alpha = 0.04$. Par evitar esta dificultad, en la práctica se ha adoptado, el enfoque del $p - valor$ (valor que siempre recogen los paquetes estadísticos cuando se realiza un contraste). Intuitivamente, el $p - valor$ nos mide el peso de la evidencia a favor de rechazar H_0.

`Definición 1:` Se define el $p - valor$ de un test al mínimo nivel de significación que nos lleva a rechazar H_0.

`Definición 2:` Se define el $p - valor$ de un test a la probabilidad de la región crítica que determina el estadístico de la prueba.

Una vez que el $p - valor$ se ha determinado, la conclusión para cualquier nivel de significación α prefijado resulta de comparar el $p - valor$ con α:

Si el $p - valor \leq \alpha \Rightarrow$	**Rechazamos** H_0 al nivel α.
Si el $p - valor > \alpha \Rightarrow$	**Aceptamos** H_0 al nivel α.

Generalmente:

- Un $p - valor > 0.1 \Rightarrow$ Nos confirma la aceptación de H_0, con tanta más seguridad cuanto mayor sea el $p - valor$.
- Un $p - valor < 0.01 \Rightarrow$ Da mucha confianza de que rechazar H_0 es la decisión correcta, cuanto más pequeño sea el $p - valor$ más confianza habrá de que rechazar es la decisión correcta.
- En situaciones intermedias, el $p - valor$ indica que el resultado del test es ambigüo, de forma que sería recomendable elegir otra muestra de mayor tamaño y repetir el contraste. En resumen tenemos que:

$p - valor > 0.1 \Rightarrow$	**Aceptamos** H_0
$p - valor < 0.01 \Rightarrow$	**Rechazamos** H_0
$0.1 < p - valor < 0.01 \Rightarrow$	**Caso dudoso**

4 Contrastes paramétricos.

En este tipo de contrastes la hipótesis nula se efectúa sobre el valor de un parámetro poblacional.

Así si denotamos por θ a un determinado parámetro poblacional y por θ_0 un valor concreto $(\theta_0 \in \mathbb{R})$. Tenemos varios tipos de posibles contrastes:

- – **Contraste BILATERAL:** Cuando las hipótesis se establecen como sigue

$$\begin{cases} H_{0:} & \theta = \theta_0 \\ H_{1:} & \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

– **Contraste UNILATERAL:** Cuando las hipótesis se establecen como sigue

$$\begin{cases} H_{0:} & \theta = \theta_0 \\ H_{1:} & \theta > \theta_0 \end{cases}$$

– **Contraste UNILATERAL:** Cuando las hipótesis se establecen como sigue

$$\begin{cases} H_{0:} & \theta = \theta_0 \\ H_{1:} & \theta < \theta_0 \end{cases}$$

Para las pruebas de este tipo, el $p - valor$ se calcula como sigue:

$$p - valor = \begin{cases} 2P(U_0 > \mid u_0 \mid), & \text{para una prueba de dos colas:} \begin{cases} H_{0:} & \theta = \theta_0 \\ H_{1:} & \theta \neq \theta_0 \end{cases} \\ P(U_0 > \mid u_0 \mid), & \text{para una prueba de cola superior:} \begin{cases} H_{0:} & \theta = \theta_0 \\ H_{1:} & \theta > \theta_0 \end{cases} \\ P(U_0 < - \mid u_0 \mid), & \text{para una prueba de cola inferior:} \begin{cases} H_{0:} & \theta = \theta_0 \\ H_{1:} & \theta < \theta_0 \end{cases} \end{cases}$$

donde U_0 es el estadístico del contraste y u_0 es el valor que toma dicho estadístico para la muestra que tengamos.

Veamos los casos más usuales de este tipo de contrastes:

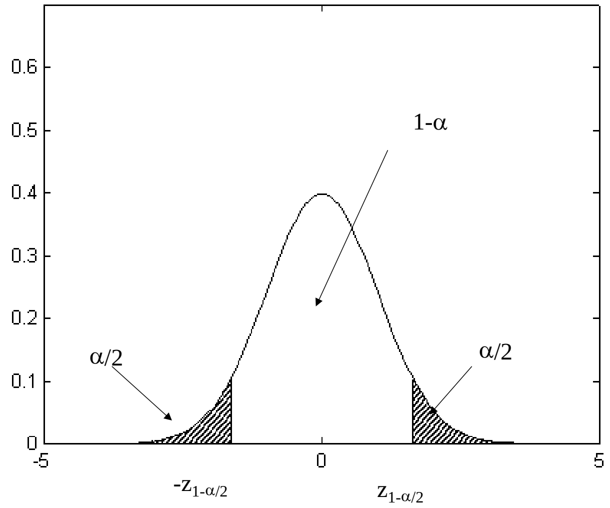
4.1 Contraste de hipótesis para la media μ de una población normal, $X \sim N(\mu, \sigma)$, con σ conocida

(a) Contraste BILATERAL:

$$\begin{cases} H_{0:} & \mu = \mu_0 \\ H_{1:} & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

donde μ_0 es un valor prefijado con el que queremos comparar μ.

- Fijamos α
- Estadístico del contraste: La media muestral $\overline{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ bajo $H_0 \Rightarrow$ Al tipificarla tenemos que $Z_0 = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ bajo H_0
- Determinamos, en la distribución $N(0,1)$, la región de rechazo$\equiv R$:



Encontramos que:

$$R = \{z \ / \ z > z_{1-\alpha/2}, \text{ o bien, } z < -z_{1-\alpha/2}\}$$

- Calculamos el valor del estadístico para la muestra que tengamos $Z_0(x_1, x_2, ..., x_n) = z_0$, entonces si

$$z_0 \in R \Rightarrow \{ \text{ Rechazaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

$$z_0 \notin R \Rightarrow \{ \text{ Aceptaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

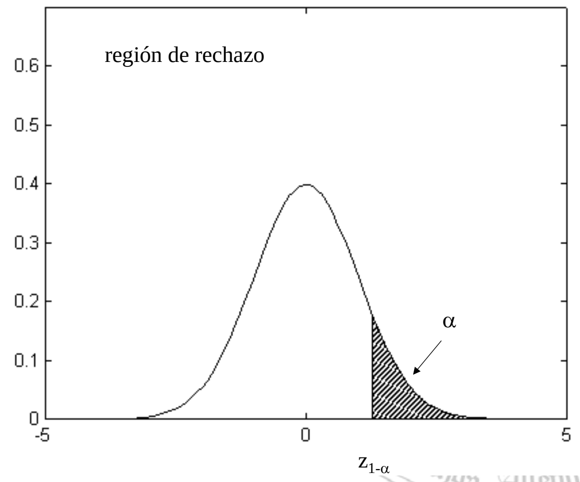
(b) Contraste UNILATERAL:

$$\begin{cases} H_{0:} & \mu = \mu_0 \\ H_{1:} & \mu > \mu_0 \end{cases}$$

donde μ_0 es un valor prefijado con el que queremos comparar μ.

- Fijamos α
- Estadístico del contraste bajo H_0: $Z_0 = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

- Determinamos, en la distribución $N(0,1)$, la región de rechazo$\equiv R$:



Encontramos que:

$$R = \{z \ / \ z > z_{1-\alpha}\}$$

- Calculamos el valor del estadístico para la muestra que tengamos $Z_0(x_1, x_2, ..., x_n) = z_0$, entonces si

$$z_0 \in R \Rightarrow \{ \text{ Rechazaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

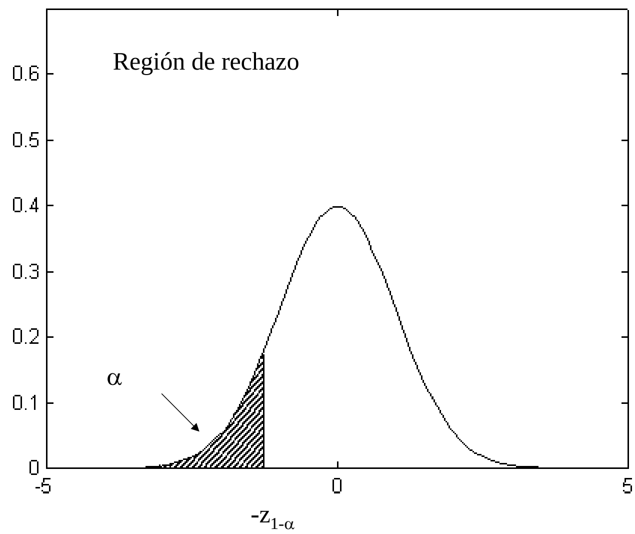
$$z_0 \notin R \Rightarrow \{ \text{ Aceptaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

(c) <u>Contraste UNILATERAL:</u>

$$\begin{cases} H_{0:} & \mu = \mu_0 \\ H_{1:} & \mu < \mu_0 \end{cases}$$

donde μ_0 es un valor prefijado con el que queremos comparar μ.

- Fijamos α
- Estadístico del contraste bajo H_0: $Z_0 = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
- Determinamos, en la distribución $N(0,1)$, la región de rechazo$\equiv R$:



Obtenemos que:

$$R = \{z \ / \ z < -z_{1-\alpha}\}$$

- Calculamos el valor del estadístico para la muestra que tengamos $Z_0(x_1, x_2, ..., x_n) = z_0$, entonces si

$$z_0 \in R \Rightarrow \{ \text{ Rechazaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

$$z_0 \notin R \Rightarrow \{ \text{ Aceptaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

<u>`Nota:`</u> Cuando la v.a. poblacional X no sea necesariamente normal con $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$, el contraste de hipótesis para la media poblacional obtenido sigue siendo válido para muestras grandes vía el Teorema Central del Límite, ya que de esta manera podemos asegurar que $\overline{X}$ se distribuye aproximadamente según una $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ cuando n es grande.

Para las pruebas de distribuciones normales presentadas hasta ahora, el $p - valor$ se calcula como sigue:

$$p - valor = \begin{cases} 2P(Z_0 > \mid z_0 \mid), & \text{para una prueba de dos colas: } \begin{cases} H_{0:} & \mu = \mu_0 \\ H_{1:} & \mu \neq \mu_0 \end{cases} \\[2ex] P(Z_0 > \mid z_0 \mid), & \text{para una prueba de cola superior: } \begin{cases} H_{0:} & \mu = \mu_0 \\ H_{1:} & \mu > \mu_0 \end{cases} \\[2ex] P(Z_0 < - \mid z_0 \mid), & \text{para una prueba de cola inferior: } \begin{cases} H_{0:} & \mu = \mu_0 \\ H_{1:} & \mu < \mu_0 \end{cases} \end{cases}$$

donde Z_0 es el estadístico del contraste y z_0 es el valor que toma dicho estadístico para la muestra que tengamos.

4.2 Contraste de hipótesis para la media μ de una población normal, $X \sim N(\mu, \sigma)$, con <u>σ desconocida</u>

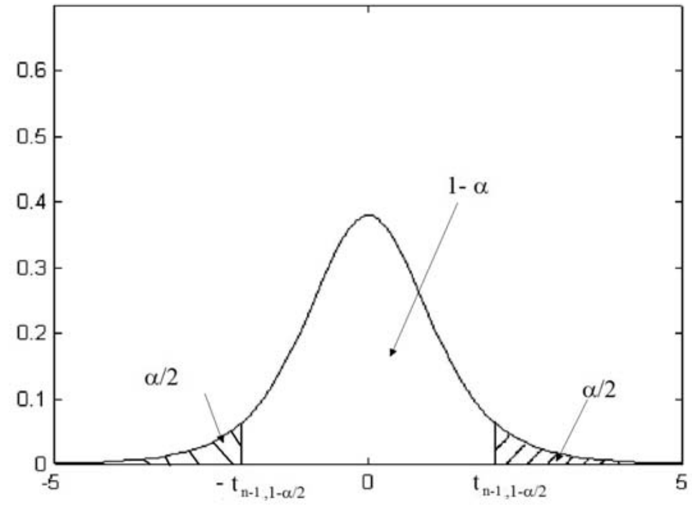
(a) <u>Contraste BILATERAL:</u>

$$\begin{cases} H_{0:} & \mu = \mu_0 \\ H_{1:} & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

donde μ_0 es un valor prefijado con el que queremos comparar μ.

- Fijamos α
- Estadístico del contraste bajo H_0: $T_0 = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

- Determinamos la región de rechazo$\equiv R$:



Encontramos que

$$R = \{t \ / \ t > t_{n-1;1-\alpha/2} \text{ o bien } t < -t_{n-1;1-\alpha/2}\}$$

- Calculamos el valor del estadístico para la muestra que tengamos $T_0(x_1, x_2, ..., x_n) = t_0$, entonces si

$$t_0 \ \in \ R \Rightarrow \{ \ \text{Rechazaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

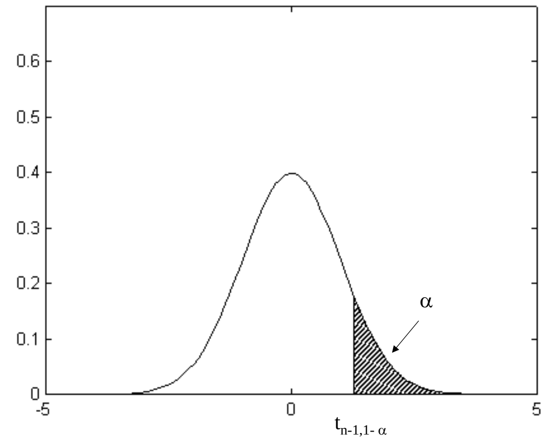
$$t_0 \ \notin \ R \Rightarrow \{ \ \text{Aceptaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

(b) **<u>Contraste UNILATERAL:</u>**

$$\begin{cases} H_{0:} & \mu = \mu_0 \\ H_{1:} & \mu > \mu_0 \end{cases}$$

donde μ_0 es un valor prefijado con el que queremos comparar μ.

- Fijamos α
- Estadístico del contraste bajo H_0: $T_0 = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$
- Determinamos la región de rechazo$\equiv R$:



Encontramos que

$$R = \{t \ / \ t > t_{n-1;1-\alpha}\}$$

- Calculamos el valor del estadístico para la muestra que tengamos $T_0(x_1, x_2, ..., x_n) = t_0$, entonces si

$$t_0 \in R \Rightarrow \{ \text{ Rechazaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

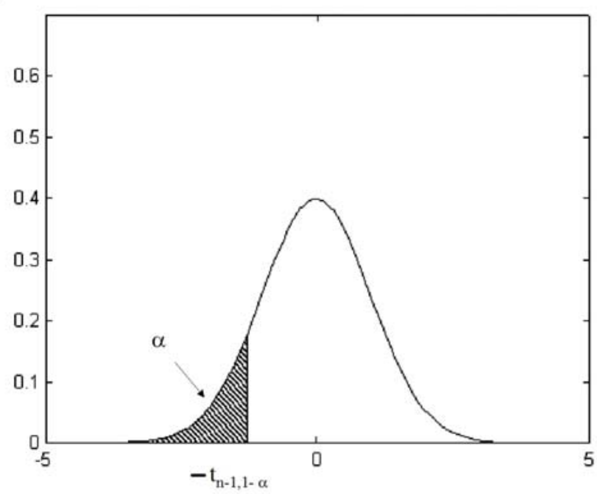
$$t_0 \notin R \Rightarrow \{ \text{ Aceptaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

(c) Contraste UNILATERAL:

$$\begin{cases} H_{0:} & \mu = \mu_0 \\ H_{1:} & \mu < \mu_0 \end{cases}$$

donde μ_0 es un valor prefijado con el que queremos comparar μ.

- Fijamos α
- Estadístico del contraste bajo H_0: $T_0 = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$
- Determinamos la región de rechazo$\equiv R$:



Encontramos que

$$R = \{t \ / \ t < -t_{n-1;1-\alpha}\}$$

- Calculamos el valor del estadístico para la muestra que tengamos $T_0(x_1, x_2, ..., x_n) = t_0$, entonces si

$$t_0 \in R \Rightarrow \{ \text{ Rechazaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

$$t_0 \notin R \Rightarrow \{ \text{ Aceptaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

Para las pruebas de distribuciones normales presentadas hasta ahora, el $p-valor$ se calcula como sigue:

$$p-valor=\begin{cases} 2P(T_0 >\mid t_0 \mid), & \text{para una prueba de dos colas: } \begin{cases} H_{0:} & \mu=\mu_0 \\ H_{1:} & \mu\neq\mu_0 \end{cases} \\ P(T_0 >\mid t_0 \mid), & \text{para una prueba de cola superior: } \begin{cases} H_{0:} & \mu=\mu_0 \\ H_{1:} & \mu>\mu_0 \end{cases} \\ P(T_0 < -\mid t_0 \mid), & \text{para una prueba de cola inferior: } \begin{cases} H_{0:} & \mu=\mu_0 \\ H_{1:} & \mu<\mu_0 \end{cases} \end{cases}$$

donde T_0 es el estadístico del contraste y t_0 es el valor que toma dicho estadístico para la muestra que tengamos.

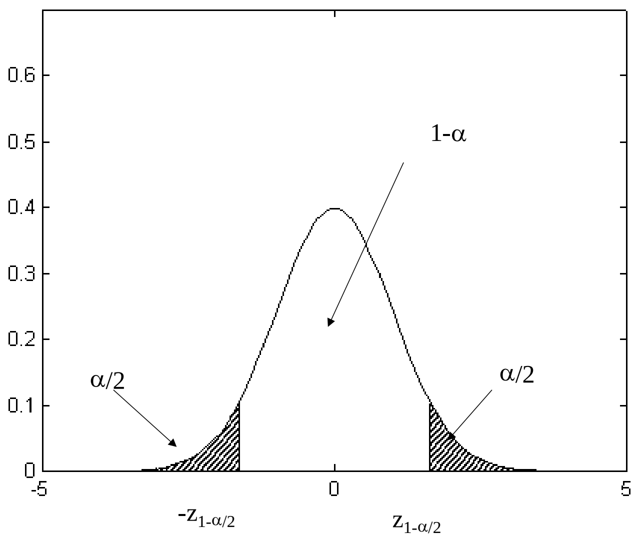
4.3 Contraste de hipótesis para la proporción

(a) <u>Contraste BILATERAL:</u>

$$\begin{cases} H_{0:} & p=p_0 \\ H_{1:} & p\neq p_0 \end{cases}$$

donde p_0 es un valor prefijado con el que queremos comparar p.

- Fijamos α
- Estadístico del contraste: La proporción muestral $\widehat{p} \sim N(p_0, \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}})$ bajo $H_0 \Rightarrow$ Al tipificarla tenemos que $Z_0 = \dfrac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$ bajo H_0
- Determinamos, en la distribución $N(0,1)$, la región de rechazo$\equiv R$:



Encontramos que:

$$R=\{z \;/\; z>z_{1-\alpha/2}, \text{ o bien, } z<-z_{1-\alpha/2}\}$$

- Calculamos el valor del estadístico para la muestra que tengamos $Z_0(x_1, x_2, ..., x_n) = z_0$, entonces si

$$z_0 \in R \Rightarrow \{ \text{ Rechazaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

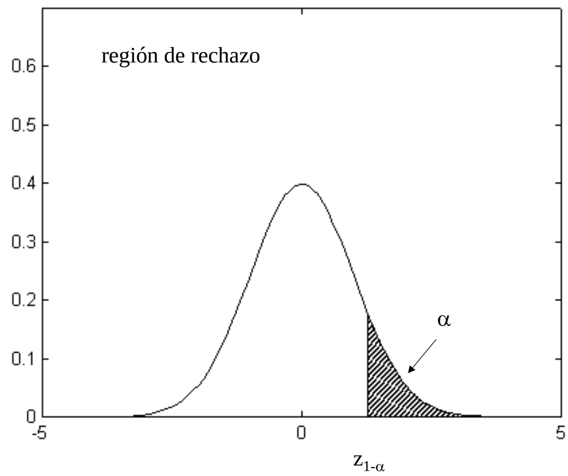
$$z_0 \notin R \Rightarrow \{ \text{ Aceptaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

(b) <u>Contraste UNILATERAL:</u>

$$\begin{cases} H_{0:} & p = p_0 \\ H_{1:} & p > p_0 \end{cases}$$

donde μ_0 es un valor prefijado con el que queremos comparar μ.

- Fijamos α
- Estadístico del contraste bajo H_0: $Z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$.
- Determinamos, en la distribución $N(0,1)$, la región de rechazo$\equiv R$:



Encontramos que:

$$R = \{z \ / \ z > z_{1-\alpha}\}$$

- Calculamos el valor del estadístico para la muestra que tengamos $Z_0(x_1, x_2, ..., x_n) = z_0$, entonces si

$$z_0 \in R \Rightarrow \{ \text{ Rechazaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

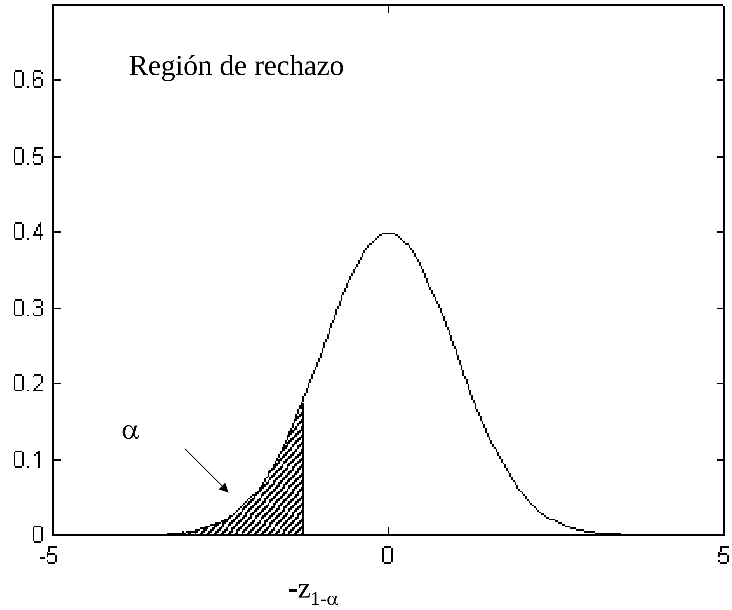
$$z_0 \notin R \Rightarrow \{ \text{ Aceptaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

(c) <u>Contraste UNILATERAL:</u>

$$\begin{cases} H_{0:} & p = p_0 \\ H_{1:} & p < p_0 \end{cases}$$

donde μ_0 es un valor prefijado con el que queremos comparar μ.

- Fijamos α
- Estadístico del contraste bajo H_0: $Z_0 = \dfrac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$.
- Determinamos, en la distribución $N(0,1)$, la región de rechazo$\equiv R$:



Obtenemos que:

$$R = \{z \; / \; z < -z_{1-\alpha}\}$$

- Calculamos el valor del estadístico para la muestra que tengamos $Z_0(x_1, x_2, ..., x_n) = z_0$, entonces si

$$z_0 \in R \Rightarrow \{ \text{ Rechazaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

$$z_0 \notin R \Rightarrow \{ \text{ Aceptaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

Para las pruebas de distribuciones normales presentadas hasta ahora, el $p-valor$ se calcula como sigue:

$$p-valor=\begin{cases} 2P(Z_0 >| z_0 |), & \text{para una prueba de dos colas: } \begin{cases} H_{0:} & p = p_0 \\ H_{1:} & p \neq p_0 \end{cases} \\ P(Z_0 >| z_0 |), & \text{para una prueba de cola superior: } \begin{cases} H_{0:} & p = p_0 \\ H_{1:} & p > p_0 \end{cases} \\ P(Z_0 < - | z_0 |), & \text{para una prueba de cola inferior: } \begin{cases} H_{0:} & p = p_0 \\ H_{1:} & p < p_0 \end{cases} \end{cases}$$

donde Z_0 es el estadístico del contraste y z_0 es el valor que toma dicho estadístico para la muestra que tengamos.

4.4 Generalización al caso de dos poblaciones.

De manera análoga a lo visto anteriormente podemos plantear contrastes de hipótesis que nos permita estudiar la validez de suposiciones que relacionan un mismo parámetro en dos poblaciones. Así:

4.4.1 Contraste para para la diferencia de medias en poblaciones normales con varianzas conocidas.

- **<u>Contraste BILATERAL:</u>**

$$\begin{cases} H_{0:} & \mu_1 = \mu_2 \\ H_{1:} & \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

donde μ_1 y μ_2 son las medias de las dos poblaciones objeto de estudio.

1. Siguiendo el mismo esquema que en el caso de una población, tenemos:

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1) \Rightarrow \overline{X_1} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}})$$

$$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2) \Rightarrow \overline{X_2} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}})$$

donde n_1 y n_2 representan los tamaños muestrales utilizados en la población X_1 y X_2 respectivamente.

2. De manera análoga a lo visto para intervalos de confianza, se tiene que el estadístico del contraste bajo $H_0(\mu_1 = \mu_2)$,vendrá dado por:

$$Z_0 = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

siendo $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$ las respectivas medias muestrales.

3. Calculamos el valor del estadístico para las muestras observadas

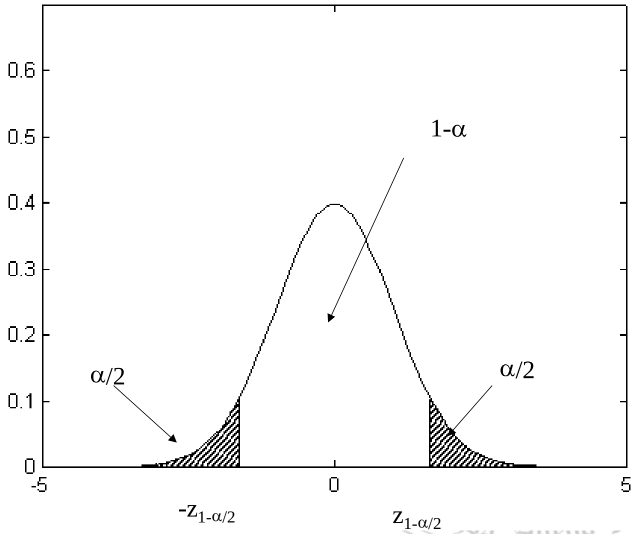
$$Z_0(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n_1}, x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n_2,}) = z_0,$$

entonces si

$$z_0 \in R \Rightarrow \{ \text{ Rechazaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

$$z_0 \notin R \Rightarrow \{ \text{ Aceptaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

siendo la región de rechazo$\equiv R$ calculada a partir de la distribución $N(0,1)$:



$$R = \{z \ / \ z > z_{1-\alpha/2}, \text{ o bien, } z < -z_{1-\alpha/2}\}$$

- De manera análoga se construyen los test unilaterales correspondientes.

4.4.2 Contraste para para la diferencia de medias en poblaciones normales con varianzas desconocidas y distintas.

- **Contraste BILATERAL:**

$$\begin{cases} H_{0:} & \mu_1 = \mu_2 \\ H_{1:} & \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

donde μ_1 y μ_2 son las medias de las dos poblaciones objeto de estudio.

De manera análoga al caso anterior se tiene que:

$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t_k$$

siendo

$$k = min(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

Por tanto el estadístico del contraste bajo H_0 $(\mu_1 = \mu_2)$,vendrá dado por:

$$T_0 = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t_k$$

siendo $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$, y s_1^2 y s_2^2 las respectivas medias y varianzas muestrales.

- Calculamos el valor del estadístico para las muestras observadas

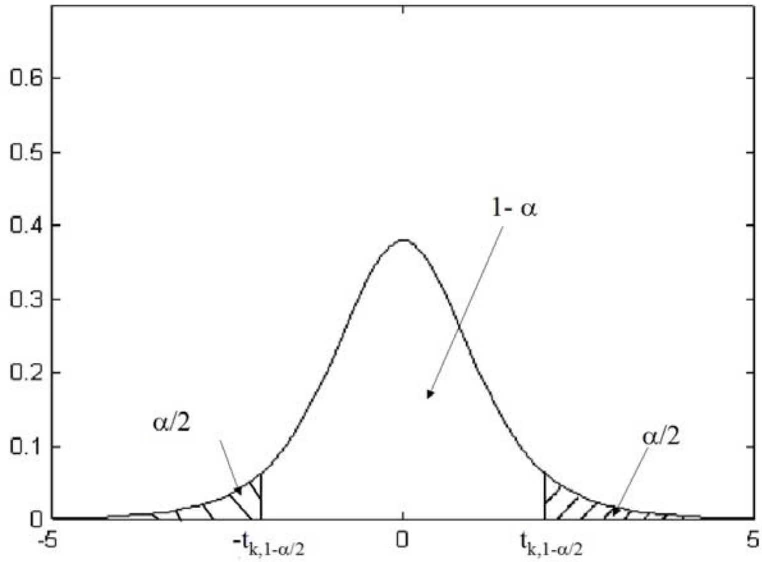
$$T_0(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n_1}, x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n_2,}) = t_0,$$

entonces si

$$t_0 \in R \Rightarrow \{ \text{ Rechazaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

$$t_0 \notin R \Rightarrow \{ \text{ Aceptaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

siendo la región de rechazo$\equiv R$:



siendo:

$$R = \{t \ / \ |t| > t_{k;1-\alpha/2}\}$$

- De manera análoga se construyen los test unilaterales correspondientes.

4.4.3 Contraste para para la diferencia de medias en poblaciones normales con varianzas desconocidas pero asumimos que son iguales.

- <u>**Contraste BILATERAL:**</u>

$$\begin{cases} H_{0:} & \mu_1 = \mu_2 \\ H_{1:} & \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

donde μ_1 y μ_2 son las medias de las dos poblaciones objeto de estudio.

- En este caso se tiene que una buena estimación para la varianza común viene dada por:

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

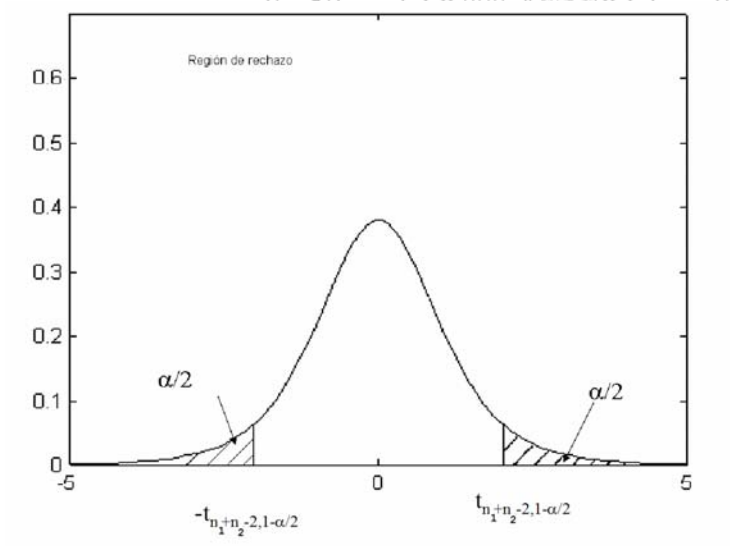
y en esta situación se tiene:

$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

Por tanto el estadístico del contraste bajo H_0,vendrá dado por:

$$T_0 = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

La región crítica será por tanto:



– De manera análoga se construyen los test unilaterales correspondientes.

4.4.4 Contraste para para la diferencia de dos proporciones.

- **<u>Contraste BILATERAL:</u>**

$$\begin{cases} H_{0:} & p_1 = p_2 \\ H_{1:} & p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

donde p_1 y p_2 son las proporciones de las dos poblaciones objeto de estudio.

– Siguiendo el mismo esquema que en el caso de los intervalos de confianza, tenemos:

∗ $(X_{11}, X_{12}, ..., X_{1n_1})$ una m.a.s. de tamaño n_1 de una v.a. $X_1 \sim B(n_1, p_1)$

∗ $(X_{21}, X_{22}, ..., X_{2n})$ una m.a.s. de tamaño n_2 de una v.a. $X_2 \sim B(n_2, p_2)$

$$\frac{\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Por tanto, bajo H_0 $(p_1 = p_2)$:

$$Z_0 = \frac{\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2}{\sqrt{\frac{\widehat{p}_1(1-\widehat{p}_1)}{n_1} + \frac{\widehat{p}_2(1-\widehat{p}_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

donde $\widehat{p}_1$ y $\widehat{p}_2$ representan las proporciones muestrales obtenidas, y n_1 y n_2 representan los tamaños muestrales utilizados en la población X_1 y X_2 respectivamente.

– Calculamos el valor del estadístico para las muestras observadas

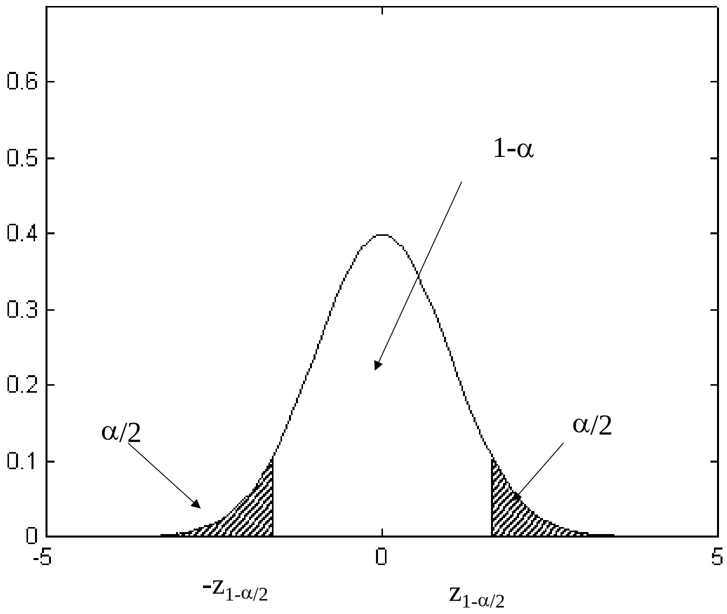
$$Z_0(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n_1}, x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n_2,}) = z_0$$

entonces si

$$z_0 \in R \Rightarrow \{ \text{ Rechazaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

$$z_0 \notin R \Rightarrow \{ \text{ Aceptaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

siendo la región de rechazo$\equiv R$:



$$R = \{z \ / \ |z| > z_{1-\alpha/2}\}$$

- De manera análoga se construyen los test unilaterales correspondientes.

5 Test de Bondad de ajuste

- Las pruebas de bondad de ajuste tienen por objetivo determinar si los datos se ajustan a una determinada distribución:

$$\begin{cases} H_{0:} & X \sim F_\theta(x) \\ H_{1:} & X \nsim F_\theta(x) \end{cases}$$

es decir, la población objeto de estudio tiene como distribución de probabilidad asociada $F_\theta(x)$, frente a que esta afirmación no es cierta.

- Como indicamos, la distribución fijada en H_0 depende de un parámetro o vector de parámetros θ. Así nos enfrentamos a dos situaciones:
  - **Hipótesis Simple:** La Hipótesis H_0 contempla el valor de θ. (hipótesis simple)
  - **Hipótesis Compuesta:** La Hipótesis H_0 únicamente contempla en modelo teórico y no el valor de sus parámetros (hipótesis compuesta). En este caso, el valor de θ se estima a partir de los valores observados de X, es decir, la muestra tiene una doble utilidad, por una lado se utiliza para realizar la estimación de dicho parámetro y por otro lado para determinar la veracidad del modelo propuesto en H_0

- Este tipo de pruebas están diseñadas para variables aleatorias discretas con un número finito de valores o bien para continuas. En algunas situaciones, en el caso de variables continuas, los valores observados de la variable se agrupan en un número finito de clases.

5.1 Test de bondad de ajuste basados en la distribución χ^2

- Están diseñados para variables aleatorias discretas con un número finito de valores, si esto no ocurriese los valores de la variable se deberan agrupar en un número finito de clases verificando ciertas condiciones.

- El fundamento básico de este tipo de pruebas es la comparación de las frecuencias absolutas observadas y las frecuencias absolutas esperadas, calculadas a partir de la distribución teórica fijada en la hipótesis H_0.

- **Desarrollo de la prueba:**
  - Sea $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una m.a.s. de una v.a. X. Asumiremos que las observaciones proceden de una distribución discreta o bien se ordenan en k intervalos de clase. En el caso discreto, las clases se correponderán con los valores que toma dicha variable y en el caso contínuo deberemos hacer nosotros las clases como ocurría con los histogramas.
  - Denotaremos por o_i la frecuencia observada en la clase i.
  - Calcularemos la frecuencia esperada, e_i, para el intervalo i-ésimo, a partir de la distribución de probabilidad hipotética.
  - El estadístico usado en esta prueba viene dado por:

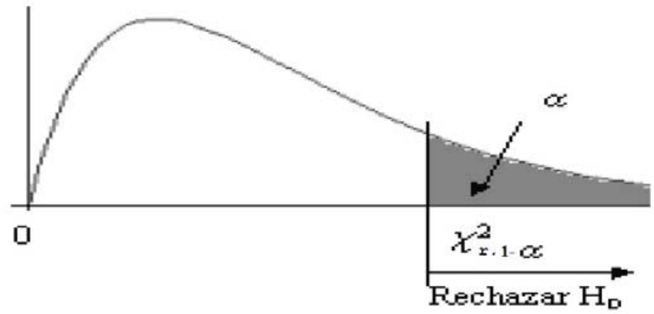
$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

- Bajo la hipótesis H_o el estadístico χ_0^2 sigue una distribución χ_r^2, siendo el número de grados de libertad:
  - **Hipótesis simple:** $r = n - 1$.
  - **Hipótesis compuesta:** $r = n - 1 - d$, siendo d el número de parámetros de la distribución estimados.
- El rechazo de H_0 re producirá cuando existan grandes discrepacias entre los valores observados y esperados. Por tanto, la región crítica vendrá dada por valores excesivamente grandes de χ_0^2.

$$\chi_0^2 \in R \Rightarrow \left\{ \text{Rechazaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza} \right.$$

$$\chi_0^2 \notin R \Rightarrow \left\{ \text{Aceptaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza} \right.$$

siendo la región de rechazo$\equiv R$:



$$R = \{\chi_0^2 \quad / \quad \chi_0^2 > \chi_{r;1-\alpha}^2\}$$

- **Nota.-** Una limitación bastante recomendable en la práctica para este tipo de pruebas, es la de no llevar a cabo el contraste cuando la **frecuencia esperada de alguna clase sea menor que 5**, para evitar problemas en la aproximación de la distribución usada a la verdadera distribución. Entonces, en los casos en los que esta condición falle, **deberemos hacer una nueva agrupación y/o agrupar clases adyacentes** con poca frecuencia hasta que se verifique que **la frecuencia esperada de todas las clases sea superior a 5**.

5.2 Test de Kolmogorov.

- Este test está diseñado para el caso de variables aleatorias continuas.

$$\begin{cases} H_{0:} & X \sim F_0(x) \\ H_{1:} & X \nsim F_0(x) \end{cases}$$

- Se basa en el concepto de la función de distribución empírica (F_n)y sus propiedades como aproximación de la función de distribución teórica. Así, si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ es una m.a.s. de una v.a. X, se define la función de distribución empírica como la frecuencia relativa acumulada de los datos observados:

$$F_n(x) = \left(\sum_{x_i \leq x} \frac{1}{n} \right) = \frac{\#(x_i \leq x)}{n}$$

- El estadístico del contraste viene dado por:

$$D_n = \sup_{x \in R} [F_n(x) - F_0(x)]$$

- Al igual que en el caso del test Ji-cuadrado, existen dos posibles situaciones , que los parámetros de la distribución de referencia sean fijado en la hipótesis H_0 (hipótesis simple) o que por el contrario se tomen las estimaciones realizadas a partir de los valores observados (hipótesis compuesta). El rechazo de H_0 re producirá cuando existan grandes discrepacias entre los valores observados y esperados. Por tanto, la región crítica vendrá dada por valores excesivamente grandes del estadístico D_n.

- Los valores máximos permitidos para el estadístico D_n que permiten asumir que H_0 es cierta se encuentran tabulados en las siguientes tablas.

  - **Tabla Kolmogorov-Smirnov.**
  - **Tabla Lilliefors:** Válida para poblaciones normales en los que se estiman sus parámetros a partir de la muestra.

- **En los anexos del final se presentan las tablas correspondientes a estos contrastes.**

5.3 Test de Shapiro-Wilks.

- El test de Shapiro-Wilk es un test específico para la distribución normal y resulta ser muy adecuado para el caso de muestras pequeñas, usualmente inferiores a 50 datos. Dicha prueba se basa en estudiar el ajuste de los valores observados representados en un gráfico de probabilidad normal.

- El estadístico del contraste se basa en una medida de dependencia lineal entre los valores observados $(x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)})$ y $(c_{1n}, c_{2n}, ..., c_{nn})$ siendo :

  - $(x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)})$ los valores observados ordenados de manera creciente, esto es: $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ... \leq x_{(n)}$.
  - $c_{in} = E\left(\dfrac{X_{(i)} - \mu}{\sigma}\right)$ bajo la hipótesis de normalidad. Usualmente:

$$c_{in} = \Phi^{-1}\left(\frac{i - 3/8}{n + 1/4}\right)$$

  donde Φ representa la función de distribución normal típica $(N(0,1))$.

- El valor del estadístico del contraste viene dado por:

$$W = \frac{1}{n \cdot s^2}\left[\sum a_{j,n}\left(x_{(n-j+1)} - x_{(j)}\right)\right]^2$$

  siendo:

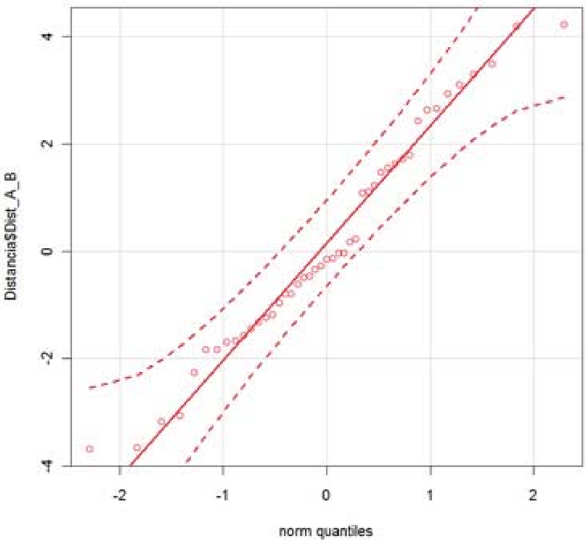
$$s^2 = \tfrac{1}{n-1}\sum (x_i - \overline{x})^2 \qquad a_{j,n} = \tfrac{|c_{in}|}{\sum c_{in}^2}$$

- El estadístico W de Shapiro-Wilks mide la fuerza del ajuste con una recta.

- Se rechaza la hipótesis de normalidad cuando el valor obtenido para el estadístico W es menor que el proporcionado en la tabla correspondiente.
- La prueba de Shapiro-Wilks está considerada como la prueba más potente para muestra inferiores a 30 datos.
- **En los anexos del final se presenta la tabla correspondiente a este contraste.**

5.4 Gráficos QQ.

- La técnica conocida como gráficos Q-Q se basa en la comparación gráfica entre los percentiles de una distribución observada frente a los percentiles de la distribución teórica, si el gráfico obtenido muestra una relación cercana a una línea recta sobre la diagonal, entonces éste sugiere que los datos provienen de la distribución propuesta.
- Si bien, como hemos comentado anteriormente es una técnica gráfica su uso está muy extendido, por su simplicidad, en el caso de distribuciones continuas y muy especialmente en el caso normal.
- Al no ser un contraste formal no nos proporcionará ningún valor que permita tomar una decisión, más bien la decisión es algo subjetiva del investigador. Por tanto puede ser considerada como un primer paso antes de plantear un contraste formal.



TABLAS PARA EL ESTADÍSTICO D_n en los test de Kolmogorov- Smirnov y Kolmogorov- Smirnov (Lilliefors)

Valores críticos de $D_n=|F_n(x)-F_0(x)|$ donde $F_n(x)$ representa la distribución empírica y $F_0(x)$ la distribución bajo la hipótesis H_0.

Test de Kolmogorov-Smirnov **Nivel de confianza de 0.90 ; 0.95 y 0.99**		**Corrección de Lilliefors para Normalidad** **Nivel de confianza de 0.90 ; 0.95 y 0.99**

	1-α					**1-α**		
n	**0,90**	**0,95**	**0,99**		**n**	**0,90**	**0,95**	**0,99**
4	0,56522	0,62394	0,73424		4	0,352	0,381	0,417
5	0,50945	0,56328	0,66853		5	0,315	0,337	0,405
6	0,46799	0,51926	0,61661		6	0,294	0,319	0,364
7	0,43607	0,48342	0,57581		7	0,276	0,3	0,348
8	0,40962	0,45427	0,54179		8	0,261	0,285	0,331
9	0,38746	0,43001	0,51332		9	0,249	0,271	0,311
10	0,36866	0,40925	0,48893		10	0,239	0,258	0,294
11	0,35242	0,39122	0,4677		11	0,23	0,249	0,284
12	0,33815	0,37543	0,44905		12	0,223	0,242	0,275
13	0,32549	0,36143	0,43247		13	0,214	0,234	0,268
14	0,31417	0,3489	0,41762		14	0,207	0,227	0,261
15	0,30397	0,3375	0,4042		15	0,201	0,22	0,257
16	0,29472	0,32733	0,39201		16	0,195	0,213	0,25
17	0,28627	0,31796	0,38086		17	0,189	0,206	0,245
18	0,27851	0,30936	0,37062		18	0,184	0,2	0,239
19	0,27136	0,30143	0,36117		19	0,179	0,195	0,235
20	0,26473	0,29408	0,35241		20	0,174	0,19	0,231
21	0,25858	0,28724	0,34426		21	0,17	0,186	0,226
22	0,25283	0,28087	0,33666		22	0,167	0,182	0,22
23	0,24746	0,2749	0,32954		23	0,164	0,179	0,213
24	0,24242	0,26931	0,32286		24	0,161	0,176	0,207
25	0,23768	0,26404	0,31657		25	0,158	0,173	0,2
26	0,2332	0,25908	0,30963		26	0,155	0,171	0,197
27	0,22898	0,25438	0,30502		27	0,153	0,168	0,194
28	0,22497	0,24993	0,29971		28	0,15	0,166	0,192
29	0,22117	0,24571	0,29466		29	0,147	0,163	0,19
30	0,21756	0,2417	0,28986		30	0,144	0,161	0,187
…	…	…	…		…	…	…	…
>30	$1,22/\sqrt{n}$	$1,36/\sqrt{n}$	$1,63/\sqrt{n}$		>30	$0,820/\sqrt{n}$	$0,890/\sqrt{n}$	$1,040/\sqrt{n}$

Nota.- **Un valor empírico <u>superior</u> al correspondiente valor de la tabla, indica el rechazo de la hipótesis H_0.**

Valores críticos del estadístico W para la prueba de Shapiro & Wilks

	1-α		
N	**0,9**	**0,95**	**0,99**
3	0,789	0,767	0,753
4	0,792	0,748	0,687
5	0,806	0,762	0,686
6	0,826	0,788	0,713
7	0,838	0,803	0,73
8	0,851	0,818	0,749
9	0,859	0,829	0,764
10	0,869	0,842	0,781
11	0,876	0,85	0,792
12	0,883	0,859	0,805
13	0,889	0,866	0,814
14	0,895	0,874	0,825
15	0,901	0,881	0,835
16	0,906	0,887	0,844
17	0,91	0,892	0,851
18	0,914	0,897	0,858
19	0,917	0,901	0,863
20	0,92	0,905	0,868
21	0,923	0,908	0,873
22	0,926	0,911	0,878
23	0,928	0,914	0,881
24	0,93	0,916	0,884
25	0,931	0,918	0,888
26	0,933	0,92	0,891
27	0,935	0,923	0,894
28	0,936	0,924	0,896
29	0,937	0,926	0,898
30	0,939	0,927	0,9
31	0,94	0,929	0,902
32	0,941	0,93	0,904
33	0,942	0,931	0,906
34	0,943	0,933	0,908
35	0,944	0,934	0,91
36	0,945	0,935	0,912
37	0,946	0,936	0,914
38	0,947	0,938	0,916
39	0,948	0,939	0,917
40	0,949	0,94	0,919
45	0,953	0,945	0,926
50	0,955	0,947	0,93

Nota.- **Un valor empírico <u>inferior</u> al correspondiente valor de la tabla, indica el rechazo de la hipótesis H_0 (normalidad).**