T.4: VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONALES

1 Ejemplo:

`Ejemplo:` Consideremos el experimento aleatorio de lanzar 3 veces una moneda trucada tal que

$$P(cara \equiv c) = 2/3$$
$$\text{y}$$
$$P(cruz \equiv x) = 1/3$$

El espacio muestral consta de 8 resultados:

$$\Omega = \{ccc, ccx, cxc, xcc, cxx, xcx, xxc, xxx\}$$

Definimos las variables aleatorias:

$$X = \textbf{N}^o \textbf{ de caras obtenidas en el primer lanzamiento} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$Y = \textbf{N}^o \textbf{ total de cara obtenidas en los tres lanzamientos} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$$

Podemos considerar la **variable aleatoria bidimensional** (X,Y) que toma los valores:

$$\begin{array}{rccc}
(X,Y): & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
 & ccc & \hookrightarrow & (1,3) \\
 & \left.\begin{array}{c} ccx \\ . \\ cxc \end{array}\right\} & \hookrightarrow & (1,2) \\
 & xcc & \hookrightarrow & (0,2) \\
 & cxx & \hookrightarrow & (1,1) \\
 & \left.\begin{array}{c} xcx \\ . \\ xxc \end{array}\right\} & \hookrightarrow & (0,1) \\
 & xxx & \hookrightarrow & (0,0)
\end{array}$$

con las siguientes probabilidades:

$$
\begin{aligned}
f(0,0) &= P(X=0,Y=0) = p(\{xxx\}) = (p(x))^3 = 1/27 \\
f(0,1) &= P(X=0,Y=1) = p(\{xcx, xxc\}) = 2\,(p(x))^2\,p(c) = 4/27 \\
f(1,1) &= P(X=1,Y=1) = p(\{cxx\}) = P(c)\,(p(x))^2 = 2/27 \\
f(0,2) &= P(X=0,Y=2) = p(\{xcc\}) = p(x)\,(p(c))^2 = 4/27 \\
f(1,2) &= P(X=1,Y=2) = p(\{ccx, cxc\}) = 2\,(p(c))^2\,p(x) = 8/27 \\
f(1,3) &= P(X=1,Y=3) = p(\{ccc\}) = (p(c))^3 = 8/27
\end{aligned}
$$

que las podemos escribir en una tabla de doble entrada como sigue:

$Y \rightarrow$ $X \downarrow$	0	1	2	3
0	1/27	4/27	4/27	0
1	0	2/27	8/27	8/27

▲ **Función Puntual de Probabilidad Conjunta de** (X,Y)

definida por:

$$\boxed{f(x,y) = P(X=x, Y=y) = P\left(\{w \in \Omega \ / \ [(X(w),Y(w)] = (x,y)\}\right), \quad \forall x,y \in \mathbb{R}}$$

notar que:

1. $f(x,y) \geq 0, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$
2. $\sum_x \sum_y f(x,y) = \sum_y \sum_x f(x,y) = 1$

2 Distribuciones bidimensionales

`Definición:`

- Un vector aleatorio (X,Y) se dice que es de tipo discreto si existen un conjunto de índices $i \in I, j \in J$ finito o infinito numerable, verificando :

$$
\begin{aligned}
P(X &= i, Y=j) \neq 0 \qquad i \in I, j \in J \\
\sum_{j\in J}\sum_{i \in I} P(X &= i, Y=j) = 1
\end{aligned}
$$

  donde $f(i,j) = P(X=i, Y=j)$ recibe el nombre de función puntual de probabilidad conjunta de (X,Y).

- Un vector aleatorio (X,Y) se dice que es de tipo continuo si existe una función $f(x,y)$ (densidad conjunta) verificando:

$$\begin{aligned} f(x,y) &\geq 0, \quad \forall x,y \in \mathbb{R} \\ \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy &= 1 \end{aligned}$$

donde $f(x,y)$ recibe el nombre de densidad conjunta de (X,Y).

2.1 Distribuciones marginales

<u>**Distribuciones Marginales de X e Y:**</u>

Distribución marginal de X :

Discreta : $\boxed{f_X(i) = P(X=i) = \sum_{j\in\mathbb{J}} f(i,j), \quad \forall i \in \mathbb{I}}$

(implica sumar por filas)

Continua : $\boxed{f_X(x) = \int_R f(x,y)dy}$

(implica integrar respecto a y)

Distribución marginal de Y :

Discreta : $\boxed{f_Y(j) = P(Y=j) = \sum_{i\in\mathbb{I}} f(i,j), \quad \forall j \in \mathbb{J}}$

(implica sumar por filas)

Continua : $\boxed{f_Y(y) = \int_R f(x,y)dx}$

(implica integrar respecto a x)

En nuestro ejemplo:

$Y \rightarrow$ / $X \downarrow$	0	1	2	3	$f_X \downarrow$
0	1/27	4/27	4/27	0	9/27
1	0	2/27	8/27	8/27	18/27
$f_Y \rightarrow$	1/27	6/27	12/27	8/27	1

2.2 Independencia de variables aleatorias

`Definición:` Dos variables aleatorias X e Y **son independientes** si verifican:

$$\boxed{f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2}$$

donde:

- $f(x, y)$ es la conjunta (es decir, la función puntual de probabilidad conjunta si $(X; Y)$ es DISCRETA, o bien, la función de densidad conjunta si $(X; Y)$ es CONTINUA) y
- $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ son las marginales de X e Y, respectivamente, (es decir, las funciones puntuales de probabilidad marginal si X e Y son DISCRETAS, o bien, las funciones de densidad marginal si X e Y son CONTINUAS).

Propiedad de la varianza si X e Y son independientes:

2. Sean X e Y variables aleatorias independientes tal que existe la $Var(X)$ y la $Var(Y)$, entonces se verifica que:

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Se puede generalizar a una combinación lineal de variables aleatorias independientes como sigue:

Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias independientes tal que existe la $Var(X_1)$, la $Var(X_2)$ y la $Var(X_n)$, entonces se verifica que:

- $Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$
- $Var(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot Var(X_i)$
  con $a_i \in R$, $\forall i$.

2.3 Variables aleatorias condicionadas

`Definición:` Dada las variable aleatoria bidimensional $(X,\ Y)$, se define la variable $X\ |_{Y=y0}$ (X condicionada a que la variable Y toma el valor y_0) a aquella variable unidimensional que verifica:

- Caso discreto: Su función puntual de probabilidad viene dada por:

$$\Pr(X\ |_{Y=y0} = i) = f_{X|_{Y=y0}}(i) = \frac{P(X = i, Y = y_o)}{P(Y = y_o)} \qquad \textit{siempre que } P(Y = y_o) \neq 0$$

- Caso continuo: Su función de densidad viene dada por:

$$f_{X|_{Y=y0}}(x) = \frac{f(x, y_0)}{f_Y(y_0)} \qquad \textit{siempre que } f_Y(y_0) \neq 0$$

  donde $P(X = i, Y = y_o)$ y $f(x, y_0)$ representan la función puntual de probabilidad/densidad conjunta y $P(Y = y_o)$ y $f_Y(y_0)$ representan la probabilidad/densidad marginal de la variable Y en el punto y_0.

  `Prop:` Si dos variables aleatorias X e Y **son independientes** se verifica:

$$f_{X|_{Y=y0}}(x) = f_X(x)$$

  donde $f_X(x)$ y $f_{X|_{Y=y0}}(x)$ son la función puntual de probabilidad/densidad marginal de X respectivamente y $f_{X|_{Y=y0}}(x)$ la respectiva condicionada a que $Y = y_0$.