

1. Una fábrica de gaseosa utiliza una envasadora automática para rellenar botellines de plástico. Cada botella debe contener 300ml pero en realidad los contenidos varían según una distribución normal con media $\mu = 298\text{ml}$ y desviación típica $= 3\text{ml}$.
 - (a) ¿Cuál es la probabilidad de que una botellín individual contenga menos de 295ml?
 - (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el contenido promedio de las botellas en un paquete de 6 contenga menos de 295ml?
2. Se realiza una medición de peso en un laboratorio, sabiendo que la desviación típica de las medidas es $= 10\text{mg}$. El operador repite la medición 3 veces y proporciona como valor del peso la media $\bar{x}$ de sus tres mediciones:
 - (a) ¿Cuál es la desviación típica del resultado proporcionado?
 - (b) ¿Cuántas veces habría que repetir la medición para reducir la desviación típica del resultado proporcionado hasta 5?
3. El resultado de una encuesta de opiniones fue que el 59% de la población española piensa que la situación económica es buena o muy buena. Supongamos, extrapolando los resultados del sondeo a la población entera, que la proporción de todos los españoles con esta opinión es efectivamente 0.59.
 - (a) Muchos de los sondeos tienen un margen de error del orden de ± 3 puntos. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de 300 españoles presente una proporción muestral que no se aleje en más de 0.03 de la proporción poblacional auténtica $p = 0.59$?
 - (b) Conteste a la pregunta anterior para una muestra de 600 individuos y otra de 1200 individuos. ¿Cuál es el efecto de aumentar el tamaño muestral?
4. Si la vida media de operación de una pila de linterna es de 24 horas y está distribuida normalmente con una desviación de 3 horas. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de 100 pilas tenga una media que se desvíe por más de 30 minutos del promedio?
5. Un aparato de medición es exacto (el valor proporcionado medio es el valor auténtico de la señal) y la desviación típica del valor medido es 0.1 unidades. La distribución del valor medido es aproximadamente normal.
 - (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el valor de una medición se aleje de la señal auténtica en más de 0.1 unidades?
 - (b) ¿Y si se repite la medición 5 veces y se toma la media de los 5 valores obtenidos?
6. En condiciones normales, una máquina produce piezas con una tasa de defectuosas del 1%. Para controlar que la máquina sigue bien ajustada, se escogen al azar cada día 100 piezas en la producción y se le somete a un test.
 - (a) ¿Cuál es la probabilidad de que, si la máquina está bien ajustada, haya, en una de esas muestras, más del 2% de piezas defectuosas?
 - (b) Si un día, 3 piezas resultan defectuosas, ¿qué conclusiones sacaría sobre el funcionamiento de la máquina.
7. Si en una población el 25% tiene actualmente la intención de votar a un nuevo partido político y encuestamos a una m.a.s. de 200 ciudadanos, calcular la probabilidad de que la proporción obtenida en la muestra no se separe de la proporción real en más de:
 - (a) 3 puntos porcentuales.
 - (b) 5 puntos porcentuales.
 - (c) 8 puntos porcentuales.
8. La calibración de una báscula debe ser revisada al pesar 20 veces un patrón de prueba de 5 Kg. Supongamos que los resultados de los diferentes pesos son independientes entre sí y que el peso de cada intento se distribuye normal con $\sigma = 0.100\text{Kg}$. Sea μ el verdadero promedio de lectura de peso de la báscula. Si la báscula debe ser revisada cuando el valor promedio de las 20 pesadas se aleja de μ en más de 0.04 unidades, ¿cuál es la probabilidad de que la báscula sea revisada?

9. Una empresa eléctrica fabrica focos que tienen una duración que se distribuye aproximadamente en forma normal, con media de 800 horas y desviación estándar de 40 horas. Encuentre:
- (a) la probabilidad de un foco tenga una duración superior a 775 horas.
 - (b) la probabilidad de que una muestra aleatoria de 16 focos tenga una vida promedio de menos de 775 horas.
10. Supongamos que las calificaciones de una prueba están distribuidas normalmente con una media de 100 puntos. Ahora supongamos que seleccionamos 20 estudiantes y les hacemos un examen. La desviación estándar de la muestra es de 15 puntos. ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio obtenido en el grupo seleccionado sea como mucho de 110 puntos?
11. En una determinada población el 30% votarían a un determinado partido en el caso de que se celebrasen mañana elecciones. Si seleccionamos al azar una muestra de 200 personas y las encuestamos, obtener las probabilidades de que:
- (a) Las personas que expresen esa intención de voto supere al 38%.
 - (b) El porcentaje de personas que expresen esa intención se separe del valor real en más del 5%.
12. Un fabricante de bomba de aire acondicionado para coches comprueba una muestra de 4 termostatos cada hora. Para ello, se colocan los termostatos en una cámara con una temperatura de 21°C , que aumenta gradualmente hasta que el termostato ponga en marcha el aire acondicionado. La temperatura media deseada de respuesta de los termostatos es de 23° , y por experimentos pasados, se sabe que la desviación típica de la temperatura de respuesta de termostatos correctamente ajustados es $= 0.5^{\circ}$. Se quiere realizar una gráfica de control $\bar{x}$, calcular la línea central así como los límites de control para esta gráfica.

HOJA 5 : MUESTREO y

DISTRIBUCIONES MUESTRALES

P. 1: $X \equiv$ Contenido de la botella
 $\sim N(\mu = 298, \sigma = 3)$

$$(a): P(X < 295) = \Phi\left(\frac{295 - 298}{3}\right) = \Phi(-1) = \\ = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$

(b): $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ con $X_i \equiv$ contenido de la botella i , $i = 1 - 6$
 $\Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu = 298, \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{6}})$

$$P(\bar{X} < 295) = \Phi\left(\frac{295 - 298}{3/\sqrt{6}}\right) = \Phi(-\sqrt{6}) = \\ = \Phi(-2.45) = 1 - \Phi(2.45) = \boxed{0.0071}$$

P. 2: $X \equiv$ Valor proporcionado por el aparato
to con $\sigma_X = 10$ mg.

$$X_1, X_2, X_3 \sim \boxed{\bar{X} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 X_i}$$

$$(a): \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \underline{5.77}$$

$$(b): d n / \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5 ?$$

$$\Rightarrow \frac{10}{\sqrt{n}} = 5 \Rightarrow \frac{10}{5} = 2 = \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow n = 2^2 = 4 \Rightarrow \boxed{\text{habría que realizar cuatro mediciones}}$$

P. 3: Sup. se $p = 0.59$

$$(a): n = 300 \Rightarrow \hat{p} \underset{n \geq 30}{\approx} N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{p} \underset{n \geq 30}{\approx} N\left(0.59, \sqrt{\frac{0.59 \times 0.41}{300}}\right)$$

0.028

$$P\left(|\hat{p} - 0.59| \leq 0.03\right) =$$

$$= P\left(-0.03 \leq \hat{p} - 0.59 \leq 0.03\right) =$$

$$= P \left(-\frac{0.03}{0.028} \leq \frac{\hat{p} - 0.59}{0.028} \leq \frac{0.03}{0.028} \right) =$$

$$= \cancel{\phi(1.07)} - \underbrace{\cancel{\phi(-1.07)}}_{1 - \phi(1.07)} =$$

$$= 2\phi(1.07) - 1 = 2 \times 0.8577 - 1 = \underline{0.7153}$$

$$(b) \rightarrow \text{Si } n = 600 \Rightarrow \hat{p} \approx N\left(0.59, \underbrace{\sqrt{\frac{0.59 \times 0.41}{600}}}_{0.02}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(|\hat{p} - 0.59| \leq 0.03\right) \overset{\uparrow}{=} \text{Desarrollando igual que antes obtenemos}$$

$$= 2\phi\left(\frac{0.03}{0.02}\right) - 1 = 2 \times \phi(1.5) - 1 = \underline{0.8664}$$

$$\rightarrow \text{Si } n = 1200 \Rightarrow \hat{p} \approx N\left(0.59, \underbrace{\sqrt{\frac{0.59 \times 0.41}{1200}}}_{0.014}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(|\hat{p} - 0.59| \leq 0.03\right) =$$

$$= 2\phi\left(\frac{0.03}{0.014}\right) - 1 = 2\phi(2.14) - 1 =$$

$$= \underline{0.9676}$$

Comentario: si aumenta n , entonces disminuye la desviación típica de $\hat{p}$
 $\Rightarrow$ la distribución normal correspondiente se hace más protiaguda, lo que significa que hay mayor probabilidad de que $\hat{p}$ se aleje de 0.59.

P. 4: $X \equiv$ la vida de la pila de linterna $\sim N(\mu = 24, \sigma = 3)$ (en horas)

Tomamos $X_1, X_2, \dots, X_{100} \sim \bar{X} \sim N(\mu = 24, \sigma_{\bar{X}} = \frac{3}{\sqrt{100}})$
 (30 minutos = $\frac{1}{2}$ de hora)

$$P(|\bar{X} - 24| > \frac{1}{2}) =$$

$$= 1 - P(|\bar{X} - 24| \leq 0.5) =$$

$$= 1 - \left[2 \phi\left(\frac{0.5}{0.3}\right) - 1 \right] =$$

$$= 2 - 2 \phi(1.67) = 2 - 2 \times 0.9525 =$$

$$= \boxed{0.095}$$

P.5: $\bar{X}$ = Valor proporcionado por el aparato
 $\sim N(\mu, \sigma_{\bar{X}} = 0.1)$

► Aparato exacto = $E(\bar{X}) = \mu$ = valor auténtico de la señal.

$$\begin{aligned} (a): \quad P(|\bar{X} - \mu| > 0.1) &= 1 - P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.1) = \\ &= 1 - \left[2\phi\left(\frac{0.1}{0.1}\right) - 1 \right] = 2 - 2\phi(1) = \\ &= 2 - 2 * 0.8413 = \boxed{0.3174} \end{aligned}$$

(b): Sup. que tenemos 5 mediciones X_1, X_2, X_3, X_4, X_5
y consideramos $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{5}} = \frac{0.1}{\sqrt{5}})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(|\bar{X} - \mu| > 0.1) &= 1 - P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.1) = \\ &= 1 - \left[2\phi\left(\frac{0.1}{0.1/\sqrt{5}}\right) - 1 \right] = 2 - 2\phi(\sqrt{5}) = \\ &= 2 - 2\phi(2.24) = 2 - 2 * 0.9875 = \boxed{0.025} \end{aligned}$$

P. 6:- $p(\text{def}) = 0.01$

(a): Tomamos $X_1, X_2, \dots, X_{100} \sim \hat{p} \approx N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$

con $X_i \begin{cases} 1, & \text{pieza bien ajustada} \\ 0, & \text{" no ajustada} \end{cases} \sim b(p),$

es decir, $X_i \sim b(p=0.01), i=1, \dots, 100$

$$\Rightarrow \hat{p} \approx N\left(0.01, \sqrt{\frac{0.01 * 0.99}{100}}\right)$$

0.0099

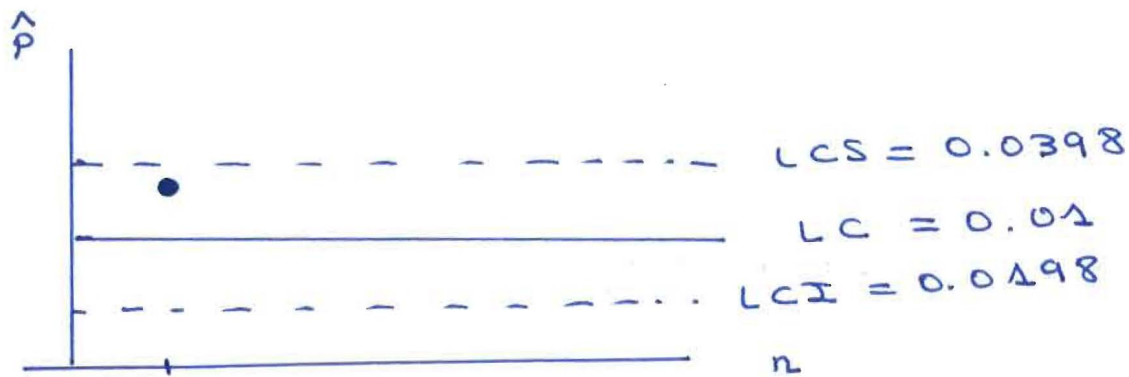
$$P(\hat{p} > 0.02) = 1 - P(\hat{p} \leq 0.02) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{0.02 - 0.01}{0.0099}\right) = 1 - \Phi(1.01) =$$

$$= 1 - 0.8437 = \boxed{0.1563}$$

(b): Tenemos $p=0.01$ y los límites de un gráfico de control para la proporción de defectuosos serán:

$$\left\{ \begin{array}{l} LUS = p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.01 + 3 * \sqrt{\frac{0.01 * 0.99}{100}} = \\ \quad = 0.0398 \\ LC = p = 0.01 \\ LCI = p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.01 - 3 * \sqrt{\frac{0.01 * 0.99}{100}} = \\ \quad = 0.0198 \end{array} \right.$$



Con lo cual, sería un valor admisible cuando el proceso está "bajo control".

P.7: $p = 0.25$ = porcentaje de electores con intención de votar a un nuevo partido.

Tomamos una muestra de 200 ciudadanos $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{p} \approx N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = N\left(0.25, \sqrt{\frac{0.25 \times 0.75}{200}}\right) = N(0.25, 0.034)$$

Nos piden:

$$\begin{aligned} (a): P(|\hat{p} - 0.25| \leq 0.03) &= 2\phi\left(\frac{0.03}{0.034}\right) - 1 = \\ &= 2\phi(0.97) - 1 = \boxed{0.668} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b): P(|\hat{p} - 0.25| \leq 0.05) &= 2\phi\left(\frac{0.05}{0.034}\right) - 1 = \\ &= 2\phi(1.61) - 1 = \boxed{0.8926} \end{aligned}$$

$$(c) = P(|\hat{p} - 0.25| \leq 0.08) = 2\Phi\left(\frac{0.08}{0.031}\right) - 1 =$$

$$= 2\Phi(2.58) - 1 = \underline{0.9902}$$

P. 8: $\triangleright X \equiv$ Valor proporcionado por la báscula en una pesada $N(\mu, \sigma_X = 0.100)$

$\triangleright$ Báscula REVISADA si $X_1, X_2, \dots, X_{20} \sim \bar{X} \equiv$
 $\equiv$ Valor PROMEDIO de las 20 pesadas se tiene que:

$$P(|\bar{X} - \mu| > 0.04)$$

$$\text{Como } X \sim N(\mu, \sigma_X = 0.100) \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \underbrace{\sigma_{\bar{X}} = \frac{0.100}{\sqrt{20}}}_{0.0224}\right)$$

$$P(\text{Revisa la báscula}) = P(|\bar{X} - \mu| > 0.04) =$$

$$= 1 - P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.04) = 1 - \left(2\Phi\left(\frac{0.04}{0.0224}\right) - 1 \right) =$$

$$= 2 - 2\Phi(1.79) = 2 - 2 * 0.9633 = \underline{0.0734}$$

=

P. 9: $X \equiv$ Duração de los pcos
 $\sim N(\mu = 800, \sigma = 40)$

$$\begin{aligned} (a): P(X > 775) &= 1 - P(X \leq 775) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{775 - 800}{40}\right) = 1 - \underbrace{\Phi(-0.63)}_{1 - \Phi(0.63)} = \\ &= \Phi(0.63) = \underline{0.7357} \end{aligned}$$

(b): Tomamos una mas de tamaño 16, $X_1, X_2, \dots, X_{16} \rightsquigarrow \bar{X} \sim N(\mu = 800, \underbrace{\sigma_{\bar{X}} = \frac{40}{\sqrt{16}}}_{10})$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} < 775) &= \Phi\left(\frac{775 - 800}{10}\right) = \\ &= \Phi(-2.5) = 1 - \Phi(2.5) = \underline{0.0062} \end{aligned}$$

P. 10: $X \equiv$ Calificaciones de la prueba
 $\sim N(\mu = 100, \sigma)$

Tomamos 20 estudiantes $\Rightarrow s = 15$

Tenemos que $\bar{X} \sim N\left(\mu = 100, \frac{\sigma}{\sqrt{20}}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{20}} \sim N(0, 1)$$

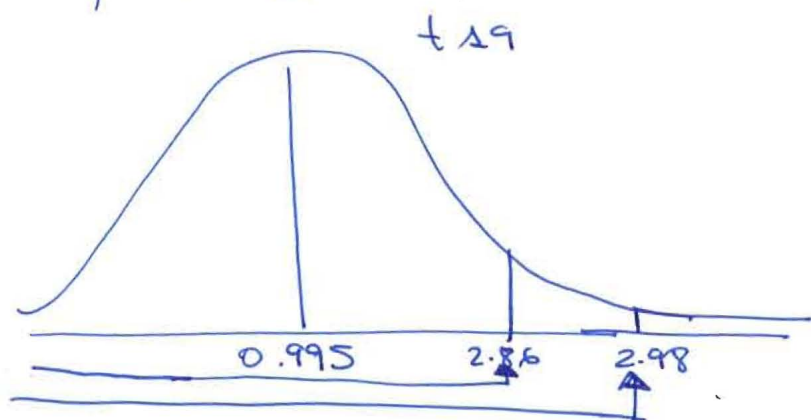
Ahora bien, como σ es desconocida la estimamos mediante la $\hat{S} \equiv$ desviación típica muestral

$$\Rightarrow T = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{S} / \sqrt{20}} \sim t_{n-1} (= t_{19})$$

Para la muestra que tenemos, la variable T quedará como sigue $T \equiv \frac{\bar{X} - 100}{15 / \sqrt{20}}$

$$P(\bar{X} \leq 110) = P\left(\frac{\bar{X} - 100}{15 / \sqrt{20}} \leq \frac{110 - 100}{15 / \sqrt{20}}\right) =$$

$$= P(t_{19} \leq 2.98) \geq P(t_{19} \leq 2.86) = \boxed{0.995}$$



P. 111: Tenemos que $p = 0.3$

Seleccionamos una muestra de 200 personas

$$\Rightarrow \hat{p} \approx N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{200}}\right) = N\left(0.3, \underbrace{\sqrt{\frac{0.3 \times 0.7}{200}}}_{0.0324}\right)$$

$$(a): P(\hat{p} > 0.38) =$$

$$= 1 - P(\hat{p} \leq 0.38) = 1 - \Phi\left(\frac{0.38 - 0.3}{0.0324}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(2.47) = 1 - 0.9933 = \underline{0.0067}$$

$$(b): P(|\hat{p} - 0.3| > 0.05) =$$

$$= 1 - P(|\hat{p} - 0.3| \leq 0.05) =$$

$$= 1 - \left[2\Phi\left(\frac{0.05}{0.0324}\right) - 1 \right] =$$

$$= 2 - 2\Phi(1.54) = \underline{0.1286}$$

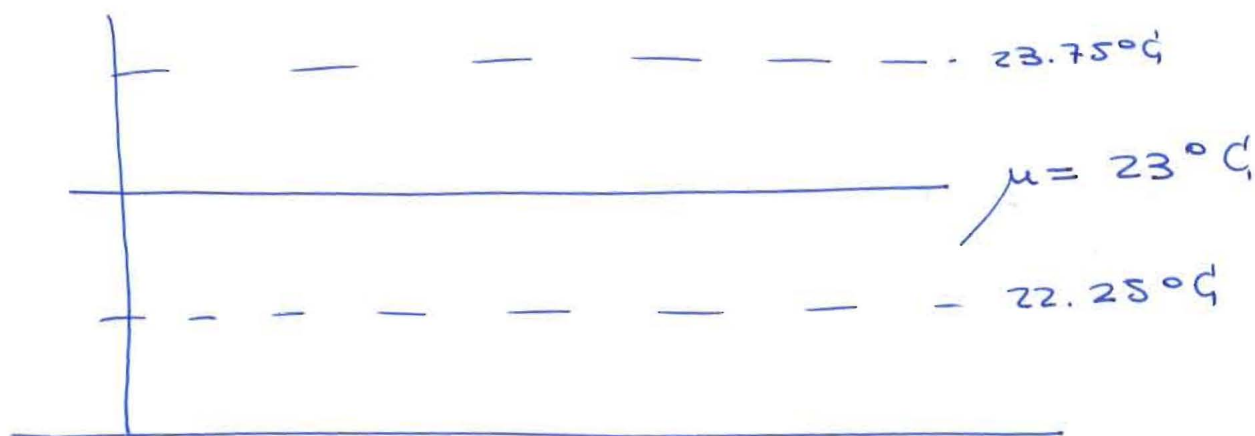
P. 120

• Temos $\bar{X} \equiv$ Temperatura de los
termostatos se purgan en muchos
 $\sim N(\mu, \sigma = 0.5^\circ\text{C})$

• Temperatura media deseada = 23°C .

• Tenemos muestras de tamaño $n=4$.

$$\Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.5}{\sqrt{4}} = \frac{0.5}{2}\right)$$



$$\text{limite superior} = 23 + 3 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 23 + 3 * \frac{0.5}{2} = 23.75^\circ$$

$$\text{limite inferior} = 23 - 3 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 23 - 3 * \frac{0.5}{2} = 22.25^\circ\text{C}$$