Dpto. Matemática Aplicada y Estadística

Grado en Ingeniería Industrial

Asignatura: Estadística Aplicada. **Curso 2010/2011**

Hoja 4: Vectores Aleatorias

1. Determinar el valor de c de tal manera que las siguientes funciones representen funciones puntuales de probabilidad conjunta de X e Y.

   a) $f(x,y) = c \cdot x \cdot y$ para $x = 1,2,3$ e $y = 1,2,3$
   b) $f(x,y) = c \mid x - y \mid$ para $x = -2,0,2$ e $y = -2,3$

2. Una moneda se lanza dos veces. Sea X el número de caras en el primer lanzamiento e Y el número total de caras en los dos lanzamientos. Si la moneda no se encuentra equilibrada y una cara tiene 40% de posibilidades de ocurrir, encuentre:

   (a) la función puntual de probabilidad conjunta de X e Y.
   (b) la distribución marginal de X y de Y.
   (c) la probabilidad de que ocurra al menos una cara.

3. Se lanzan dos dados cúbicos ordinarios a la vez. Sean X e Y las variables que representan el número de puntos obtenidos en el primer lanzamiento y el número mayor de puntos obtenidos por los dos dados, respectivamente. Se pide:

   (a) Encontrar la función puntual de probabilidad conjunta de X e Y y las marginales. ¿Son independientes X e Y?
   (b) Calcular la función puntual de probabilidad de Y condicionada a $X = 2$.
   (c) Calcular la función puntual de probabilidad de X condicionada a $Y = 6$.
   (d) $P(2 \leq X \leq 4 \mid Y \geq 5)$.

4. Un sistema electrónico contiene dos componentes que funcionan de manera independiente entre si. Para la componente i $(i = 1,2)$ definimos la variable X_i de forma que $X_i = 1$ si la componente i-ésima funciona y $X_i = 0$ en caso contrario. Sea p_i la probabilidad de que funcione la componente i-ésima. Calcular:

   (a) la función puntual de probabilidad del vector (X_1, X_2).
   (b) la probabilidad de que el sistema funcione si las componentes son conectadas en serie y la probabilidad de que el sistema funcione si las componentes son conectadas en paralelo.

5. Dos variables aleatorias tienen la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x^2+y^2), & 0 \leq x \leq 2 \ , 1 \leq y \leq 4 \\ 0, & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

   Calcular el valor de la constante k y $P(1 < X < 2, 2 < Y < 3)$ y $P(1 < X < 2)$.

6. Si X e Y representan las duraciones en años, de dos componentes en un sistema electrónico, cuya función de densidad conjunta es:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \\ 0, & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

   Se pide:

   (a) ¿Son X e Y independientes?
   (b) $Pr(X > 0.5)$ y $Pr(Y > 0.5)$.

7. En una red de supermercados, en un mes dado, se recogen los datos siguientes : para cada supermercado, la proporción de clientes que compra sólo una vez en el mes, y por otra parte, el beneficio del supermercado al cabo del mes. Podemos así definir dos variables aleatorias , X: proporción de clientes que compra sólo una vez en el mes; Y: beneficio del supermercado, y obtenemos la siguiente función de densidad conjunta para (X,Y) :

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+y)e^{-x}, & 0 < x < 1 \ , \ y \geq 0 \\ 0, & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

   (a) Describir el experimento aleatorio junto con el espacio muestral.
   (b) Determinar el valor de k para que f sea efectivamente una función de densidad conjunta.
   (c) ¿Son las v.a X y Y independientes? En un supermercado dado, se sabe que el porcentaje de clientes que compra sólo una vez en el mes es menor que 25%, ¿cuál es la probabilidad de que el beneficio supere el millón de pesetas?

8. El índice anual de subida de precios X, y el índice anual de subida de salarios Y son un par de v.a. que se distribuyen conjuntamente según la función de densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} k \cdot x \cdot y^2, & 0 < x < 7, \ 0 < y < 6 \\ 0, & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

   (a) Describir el experimento aleatorio y el espacio muestral que da origen a esa situación.
   (b) Determinar el valor de la constante k para que f sea efectivamente una función de densidad.
   (c) Si en un año la subida de los precios ha sido del 5 %, calcular cuál habrá sido la función de densidad del índice de subida de salarios. Comparar el resultado obtenido con el que se obtendría con una subida de precios de 4%
   (d) ¿Se puede afirmar que la subida de salarios está influida o condicionada por la subida de precios?

Dpto. Matemática Aplicada y Estadística

1. Si denotamos por I el conjunto de índices asociados a la variable X y por J al conjunto de índices asociados a la variable Y, tenemos que las dos condiciones que deben verificarse para que una función sea función puntual de probabilidad bivariante $f(x,y)$ son:

   - $f(x,y) \geq 0$
   - $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} f(x_i, y_j) = 1$

   por consiguiente:

   (a) Como:

   $$f(x,y) = c \cdot x \cdot y \text{ para } x = 1,2,3 \text{ e } y = 1,2,3 \Rightarrow x_i = i \quad ; \quad y_j = j \text{ para } i,j = 1,2,3$$

   tenemos que la constante $c \geq 0$ para que $f(x,y) \geq 0$. Por otro lado, como:
   $1 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} f(x_i, y_j) = c \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_i y_j = c[1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 +$
   $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3] = 36c$
   $\Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{36}}$

   (b) De manera análoga al apartado anterior, como:
   $f(x,y) = c \mid x - y \mid$ para $x = -2, 0, 2$ e $y = -2, 3$ tenemos que $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ y por otro lado $y_1 = -2$, $y_2 = 3$. Luego, por un lado $c \geq 0$ para que se verifique $f(x,y) \geq 0$. Además, como:
   $1 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j) =$
   $= c[\mid -2+2 \mid + \mid -2-3 \mid + \mid 0+2 \mid + \mid 0-3 \mid + \mid 2+2 \mid + \mid 2-3 \mid]$
   $= c\,[5+2+3+4+1] = 15c \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{15}}$

2. Si una moneda es lanzada dos veces, el conjunto de posibles resultados del experimento será: $S = \{(c,c), (c,+), (+,c), (+,+)\}$. Las variables aleatorias que nos interesan son:

   $$X = \{\text{num. de caras del primer lanzamiento}\}$$
   $$Y = \{\text{num. de caras obtenidas en los dos lanzamientos}\}$$

   por tanto, la variable X sólo toma los valores 0 y 1, mientras que la variable Y puede tomar los valores 0, 1, 2. Como nos dicen que la moneda está trucada, los resultados no son equiprobables, y del enunciado deducimos $P(cara) = 0.4$ y $P(cruz) = 0.6$

   (a) Calculemos la función puntual de probabilidad asociada a la variable bidimensional (X,Y) : introducimos los sucesos C_1 ="sale cara en el primer lanzamiento", y C_2 ="sale cara en el segundo lanzamiento". Teniendo en cuenta que el resultado obtenido en el primer lanzamiento es independiente del obtenido en el segundo, C_1 y C_2 son independientes.
   $f(0,0) = f(X=0, Y=0) = P(C_1^C \bigcap C_2^C) = P(C_1^C)P(C_2^C) = 0.6^2 = 0.36$
   $f(1,0) = f(X=1, Y=0) = 0$ (puesto que si la primera es cara el total no puede ser 0)
   $f(0,1) = f(X=0, Y=1) = P(C_1^C \bigcap C_2) = 0.6 \cdot 0.4 = 0.24$
   $f(1,1) = f(X=1, Y=1) = P(C_1 \bigcap C_2^C) = 0.4 \cdot 0.6 = 0.24$
   $f(1,2) = f(X=1, Y=2) = P(C_1 \bigcap C_2) = 0.4^2 = 0.16$
   $f(0,2) = f(X=0, Y=2) = 0$ (puesto que si la primera no es cara el total no puede ser 2)
   Con el fin de facilitar los cálculos, representaremos los resultados obtenidos en una tabla de doble entrada (tabla de contingencia):

$f(x,y)$			
	$y_1\,(=0)$	$y_2(=1)$	$y_3(=2)$
$x_1(=0)$	0.36	0.24	0
$x_2(=1)$	0	0.24	0.16

   (b) La función puntual de probabilidad marginal de la variable X se obtendrá por medio de:

   $$f_X(x) = \sum_{j=1}^{3} f(x, y_j) = \begin{cases} 0.36 + 0.24 + 0 = 0.6 \text{ si } x = 0 \\ 0 + 0.24 + 0.16 = 0.4 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

De manera análoga, la marginal asociada a la variable Y será:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{2} f(x_i, y) = \begin{cases} 0.36 + 0 = 0.36 \text{ si y=0} \\ 0.24 + 0.24 = 0.48 \text{ si y=1} \\ 0 + 0.16 = 0.16 \text{ si y=2} \end{cases}$$

de manera mucho más cómoda se suelen representar los resultados obtenidos en los apartados anteriores en una única tabla como la siguiente:

	$f(x,y)$			f_X
	$y_1 (= 0)$	$y_2(= 1)$	$y_3(= 2)$	
$x_1(= 0)$	0.36	0.24	0	0.6
$x_2(= 1)$	0	0.24	0.16	0.4
f_y	0.36	0.48	0.16	1

(c) Por último
$P(\textit{al menos una cara}) = 1 - P(\textit{ninguna cara})$
$= 1 - f(X = 0, Y = 0) = 1 - 0.36 = 0.64$

3. (a) Los 36 posibles resultados del experimento son:

$$S = \{(1,1), (1,2), ..., (6,5), (6,6)\}$$

Sean i y j dos números entre 1 y 6. Tenemos que calcular $f(i,j)$. Observamos primero que es imposible que $X > Y$, por lo tanto si $i > j$, $f(i,j) = 0$. En cambio, si $i < j$, $f(i,j) = P(X = i, Y = j) = 1/36$. Ahora, en el caso en que $i = j$, hay que calcular con más precaución.

$$\begin{aligned} f(1,1) &= P(X = 1, Y = 1) = P(\textit{sale } 1 \text{ y } 1) = 1/36 \\ f(2,2) &= P(X = 2, Y = 2) = P(\textit{sale } 2 \text{ y sale } 1ó2) = 2/36 \\ f(3,3) &= P(X = 3, Y = 3) = P(\text{sale 3 y sale 1, 2 ó 3})=3/36 \\ f(4,4) &= P(X = 4, Y = 4) = P(\text{sale 4 y sale 1, 2, 3 ó 4})=4/36 \\ f(5,5) &= 5/36 \\ f(6,6) &= 6/36 \end{aligned}$$

Sumando en la tabla correspondiente, tenemos

	$f(x,y)$						f_X
	$y_1 (= 1)$	$y_2(= 2)$	$y_3(= 3)$	$y_4(= 4)$	$y_5(= 5)$	$y_6(= 6)$	
$x_1(= 1)$	1/36	1/36	1/36	136	1/36	1/36	1/6
$x_2(= 2)$	0	2/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
$x_3(= 3)$	0	0	3/36	1/36	1/36	1/36	1/6
$x_4(= 4)$	0	0	0	4/36	1/36	1/36	1/6
$x_5(= 5)$	0	0	0	0	5/36	1/36	1/6
$x_6(= 6)$	0	0	0	0	0	6/36	1/6
f_Y	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	1

Evidentemente ambas variables no son independientes como se desprende de su propia definición. Formalmente obtenemos esta conclusión de manera inmediata puesto que:

$$\frac{1}{36} = f(1,1) \neq f_X(1) \cdot f_Y(1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{36}$$

(b) La función puntual de probabilidad que nos piden es:

$$f_{Y|2}(y) = P(Y = y \mid X = 2) = \frac{P(X = 2, Y = y)}{P(X = 2)} = \frac{f(2,y)}{f_X(2)}$$

por tanto:

y	1	2	3	4	5	6
$f_{Y\|2}(y)$	0	1/3	1/6	1/6	1/6	1/6

(c) La función puntual de probabilidad que nos piden es:

$$f_{X|6}(x\ ) = P(X = x \mid Y = 6) = \frac{P(X = x, Y = 6)}{P(X = 6)} = \frac{f_{XY}(x,6)}{f_Y(6)}$$

por tanto:

x	1	2	3	4	5	6
$f_{X\|Y}(x\|6)$	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	6/11

(d) Por último, la probabilidad $P(2 \le X \le 4 \mid Y \ge 5)$, será:

$$\begin{aligned} P(2 &\le X \le 4 \mid Y \ge 5) = \frac{P(2 \le X \le 4, Y \ge 5)}{P(Y \ge 5)} = \frac{f(2,5)+f(2,6)+f(3,5)+...+f(6,6)}{f_Y(5)+f_Y(6)} \\ &= \frac{f(5,5)+f(5,6)+f(6,6)}{f_Y(5)+f_Y(6)} = \frac{\frac{5}{36}+\frac{1}{36}+\frac{6}{36}}{\frac{9}{36}+\frac{11}{36}} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

4. Los datos del enunciado son los siguientes

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si la componente } i-\textit{ésima} \text{ funciona} \\ 0 \text{ si la componente } i-\textit{ésima} \text{ no funciona} \end{cases} \quad \text{para } i = 1,2$$

y

$$p_i = P(\textit{funciona la componente } i - \textit{ésima}) = P(X_i = 1)$$

(a) Consideremos la variable bidimensional (X_1, X_2). Entonces:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= P(\textit{no} \text{ funciona ninguna}) = P(X_1 = 0 \bigcap X_2 = 0) = (1-p_1)(1-p_2) \\ f(0,1) &= P(\text{la primera no funciona y la segunda si}) = P(X_1 = 0 \bigcap X_2 = 1) = (1-p_1)p_2 \\ f(1,0) &= P(X_1 = 1 \bigcap X_2 = 0) = p_1 \cdot (1-p_2) \\ f(1,1) &= P(X_1 = 1 \bigcap X_2 = 1) = p_1 \cdot p_2 \end{aligned}$$

de manera más resumida:

$$\boxed{f(x_1,x_2) = \prod_{i=1}^{2} p_i^{x_i}(1-p_i)^{1-x_i} \; \textit{con } x_i = 0,1 \textit{ e } i = 1,2}$$

(b) Como sabemos, un sistema montado en serie funciona siempre y cuando funcionen todas sus componentes, por tanto:

$$P(\textit{funciona en serie}) = f(1,1) = p_1 \cdot p_2$$

Por otro lado, un sistema en paralelo deja de funcionar cuando lo hacen todas sus componentes, por tanto:

$$\begin{aligned} P(\textit{funciona en paralelo}) &= 1 - P(\textit{fallan todas las componentes}) \\ &= 1 - f(0,0) = 1 - (1-p_1)(1-p_2) \end{aligned}$$

5. Deben verificarse las dos condiciones de la definición de una función de densidad conjunta, de la primera deducimos que k debe de ser positiva, y de la segunda:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_R\int_R f(x,y)dxdy = k\int_1^4\left(\int_0^2 (x^2+y^2)dx\right)dy = k\int_1^4\left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_0^2 dy \\ &= k\int_1^4\left(\frac{8}{3}+2y^2\right)dy = k\left[\frac{8}{3}y+2\frac{y^3}{3}\right]_1^4 = k\left(\frac{32}{3}+\frac{2\cdot 4^3}{3}-\frac{8}{3}-\frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{150}{3}k = 50k \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{50}} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} P(1 &< X < 2, 2 < Y < 3) = \int_2^3\left(\int_1^2 f(x,y)dx\right)dy = \frac{1}{50}\int_2^3\left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_1^2 dy \\ &= \frac{1}{50}\int_2^3\left(\frac{7}{3}+y^2\right)dy = \frac{1}{50}\left[\frac{7}{3}y+\frac{y^3}{3}\right]_2^3 = \frac{13}{75} \end{aligned}$$

Para calcular $P(1 < X < 2)$, es conveniente determinar primero la función de densidad marginal de X. Tenemos $f_X(x) = \int_R f(x,y)dy$, si $0 \le x \le 1$, deducimos que $f_X(x) = \frac{1}{50}\int_1^4 (x^2+y^2)dy = \frac{1}{50}\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_1^4 = \frac{1}{50}(4x^2+64/3-x^2-1/3) = \frac{1}{50}(3x^2+21)$, y $f_X(x) = 0$ en otro caso. Por consiguiente $P(1 < X < 2) = \frac{1}{50}\int_1^2\left(3x^2+21\right)dx = \frac{1}{50}\left[x^3+21x\right]_1^2 = \frac{14}{25}$

6. (a) La función de densidad marginal de X es $f_X(x) = \int_R f(x,y)dy$. Por lo tanto si $x < 0$, puesto que $f(x,y) = 0$, $f_X(x) = 0$. En cambio, si $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^\infty e^{-(x+y)}dy = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}e^{-y}dy \\ &= e^{-x}\cdot\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-y}dy = e^{-x}\cdot\lim_{a\to\infty}\left[-e^{-y}\right]_0^a = e^{-x}\left[0+1\right] \end{aligned}$$

luego:

$$f_X(x) = e^{-x} \text{ si } x \geq 0$$

La marginal de la variable Y es $f_Y(x) = \int_R f(x,y)dx$, si $y < 0, f_Y(y) = 0$ y en cambio si $y \geq 0$,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_R f(x,y)dx = \int_0^\infty e^{-(x+y)}dx = e^{-y}\cdot\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}dx \\ &= e^{-y} \end{aligned}$$

por tanto, como se verifica

$$f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) \text{ para todo } (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

las variables X e Y son independientes.

(b) La probabilidad $P(X < 1/2)$ es

$$P(X < 1/2) = \int_{-\infty}^{1/2} f_X(t)dt = \int_0^{1/2} e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{1/2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} = 0.3935$$

La probabilidad $P(Y > 1/2)$ vendrá dada por:

$$\begin{aligned} P(Y &> 1/2) = 1 - P(Y \leq 1/2) = 1 - \int_{-\infty}^{1/2} f_Y(t)dt = 1 - \int_0^{1/2} e^{-y}dy \\ &= 1 - \left[-e^{-y}\right]_0^{1/2} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} = 0.6065 \end{aligned}$$

7. (a) El experimento aleatorio consiste a escoger al azar un supermercado dentro de la red que estudiamos. El espacio muestral es por lo tanto el conjunto de todos los supermercados de la red.

(b) Para que f_{XY} sea una función de densidad tiene que cumplir dos condiciones, de la primera deducimos que k debe de ser positiva y de la segunda :

$$\begin{aligned} 1 &= \int_R\int_R f(x,y)dydx = \int_{x=0}^1\int_{y=0}^{+\infty} k(x+y)e^{-y}dydx \\ &= \int_{x=0}^1\int_{y=0}^{+\infty} kxe^{-y}dydx + \int_{x=0}^1\int_{y=0}^{+\infty} kye^{-y}dydx \\ &= k\int_{x=0}^1 x\int_{y=0}^{+\infty} e^{-y}dydx + k\int_{x=0}^1\int_{y=0}^{+\infty} ye^{-y}dydx \end{aligned}$$

Vamos a calcular los dos términos de esa igualdad separadamente :
Primero :
$k\int_{x=0}^1 x\left(\int_{y=0}^{+\infty} e^{-y}dy\right)dx = k\int_{x=0}^1 x\left[-e^{-y}\right]_0^{+\infty}dx = k\int_{x=0}^1 x(0-(-1))dx$
$= k\frac{1}{2}$
Segundo :
$k\int_{x=0}^1\int_{y=0}^{+\infty} ye^{-y}dydx = k\int_{y=0}^{+\infty} ye^{-y}\left(\int_{x=0}^1 dx\right)dy = k\int_0^{+\infty} ye^{-y}dy,$
esa integral debe calcularse por partes :
$k = k([-e^{-y}y]_0^{+\infty} - \int_{y=0}^{+\infty} -e^{-y}dy) = k(\lim_{a\to+\infty}(-e^{-a}a) - 0 - [e^{-y}]_0^{+\infty}) =$
$k\cdot 1 = k$
Finalmente obtenemos que la segunda condición implica $k\frac{1}{2} + k = 1$, i.e $k = \frac{2}{3}$.

(c) Calculemos la densidad marginal de X. Tenemos que $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$,y puesto que si x no pertenece a $]0,1[, f(x,y) = 0$,deducimos que si x no pertenece a $]0,1[$, $f_X(x) = 0$. En cambio si $0 < x < 1$,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{2}{3}\int_0^{\infty}(x+y)\cdot e^{-y}dy \\ &= \frac{2}{3}x\int_0^{\infty} e^{-y}dy + \frac{2}{3}\int_0^{\infty} y\cdot e^{-y}dy \end{aligned}$$

Ya hemos calculado esas integrales en el apartado anterior y obtenemos

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+1), \text{ si } 0 < x < 1 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Calculemos ahora la densidad marginal de Y. Tenemos que $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$,por lo tanto si $y \leq 0$, $f_Y(y) = 0$. En cambio si $y > 0$,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{2}{3}\int_0^1 (x+y)\cdot e^{-y}dx \\ &= \frac{2}{3}e^{-y}\int_0^1 xdx + \frac{2}{3}y\cdot e^{-y}\int_0^1 1dx \\ &= \frac{2}{3}e^{-y}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}y\cdot e^{-y} \end{aligned}$$

i.e

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-y}\cdot\left(1+\frac{2}{3}y\right) \text{ si } y > 0 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Podemos ahora determinar si X e Y son independientes, es fácil comprobar que $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, por lo tanto X y Y no son independientes.

(d) Nos piden en ese apartado $P(Y \geq 1|X < 0.25)$.

Sabemos que $P(Y \geq 1|X < 0.25) = \frac{P(Y\geq 1 \bigcap X<0.25)}{P(X<0.25)} = \frac{\int_{y=1}^{\infty}\int_{x=-\infty}^{0.25} f_{XY}(x,y)dxdy}{\int_{-\infty}^{0.25} f_X(x)dx}$

Cálculo del numerador :

$$\begin{aligned} &\int_{y=1}^{\infty}\int_{x=-\infty}^{0.25} f(x,y)dxdy \\ =& \int_{y=1}^{\infty}\int_{x=0}^{0.25}\frac{2}{3}(x+y)\cdot e^{-y}dxdy \\ =& \frac{2}{3}\int_{y=1}^{\infty} e^{-y}\left(\int_{x=0}^{0.25} xdx\right)dy + \frac{2}{3}\int_{y=1}^{\infty} ye^{-y}\left(\int_{x=0}^{0.25} 1dx\right)dy \\ =& \frac{2}{3}\int_{y=1}^{\infty} e^{-y}\left(\frac{0.25^2}{2}\right)dy + \frac{2}{3}\int_{y=1}^{\infty} ye^{-y}(0.25)\,dy \\ =& \frac{2}{3}\left(\frac{0.25^2}{2}\right)\left[-e^{-y}\right]_1^{+\infty} + \frac{2}{3}(0.25)\left(\left[-e^{-y}y\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -e^{-y}dy\right) \\ =& \frac{1}{48}e^{-1} + \frac{1}{6}\left(e^{-1}+e^{-1}\right) = \frac{17}{48}e^{-1} \simeq 0.13029 \end{aligned}$$

8. (a) A cada año, se le asocia el índice de subida de precios y el índice de subida de salarios, por lo tanto podemos describir el experimento aleatorio como, "se escoge al azar un año". El espacio muestral es entonces el conjunto de todos los años.

(b) Para que f_{XY} sea una función de densidad tiene que cumplir dos condiciones, de la primera deducimos que k debe de ser positiva y de la segunda :

$$\begin{aligned} 1 &= \int_R\int_R f_{XY}(x,y)dydx = \int_{x=0}^{7}\int_{y=0}^{+6} ky^2xdydx \\ &= k\int_{x=0}^{7} x\left(\int_{y=0}^{6} y^2dy\right)dx = k\int_{x=0}^{7} x\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^6 dx \\ &= k\frac{6^3}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^7 = k1764 \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $\boxed{k = \frac{1}{1764}}$

(c) Nos piden la densidad condicional de Y dado que $(X = 0.05)$, para eso tenemos que calcular la función de densidad marginal de $\dot{X}$: tenemos que $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$,y puesto que si x no pertenece a $]0,7[$, $f_{XY}(x,y) = 0$,deducimos que si x no pertenece a $]0,7[$, $f_X(x) = 0$. En cambio si $0 < x < 7$,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{1764}\int_0^{+6} y^2 \cdot x dy \\ &= \frac{1}{1764}x\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^6 = \frac{2x}{49} \end{aligned}$$

o sea

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{49} \text{ si } 0 < x < 7 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Nos será útil calcular la densidad marginal de Y : procedemos de manera similar al cálculo anterior, si y no pertenece al intervalo $]0,6[$, $f_Y(y) = 0$. En cambio, $y \in]0,6[$,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \frac{1}{1764}\int_0^{+7} y^2 \cdot x dx \\ &= \frac{1}{1764}y^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^7 = \frac{1}{72}y^2 \end{aligned}$$

o sea

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{72}y^2 \text{ si } 0 < y < 6 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Por definición, para x dado tal que $f_X(x) \neq 0$, $f_{Y|x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \forall y$. Por lo tanto,

$$\text{si } 0 < x < 1, \forall y,\ f_{Y|x}(y) = \begin{cases} \frac{y^2 x}{1764} \cdot \frac{49}{2x} = \frac{1}{72}y^2 \text{ si } 0 < y < 6 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Deducimos $f_{Y|0.05}(y) = f_{Y|0.04}(y) = \begin{cases} \frac{y^2 x}{1764} \cdot \frac{49}{2x} = \frac{1}{72}y^2 \text{ si } 0<y<6 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$

(d) La pregunta es equivalente a " ¿son X y Y independientes ?". Del apartado anterior, deducimos que $\forall y,\ f_{Y|x}(y) = f_Y(y)$. Por lo tanto las v.a. X y Y son independientes.