<u>DEF</u>: Un vector $\vec{u}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ si existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$$

<u>OBS</u>: De las condiciones (1) y (2) de la definición de subespacio vectorial resulta que toda combinación lineal de vectores $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ de F (sub. esp) es un vector de F.

$$\left(\vec{u} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\lambda_1 \underbrace{\vec{u}_1}_{\in F}}_{\in F\ (2)} + \underbrace{\lambda_2 \vec{u}_2}_{\in F}}_{\in F\ (1)} + \dots + \underbrace{\lambda_n \vec{u}_n}_{\in F}}_{\in F} \right)$$

<u>DEF:</u> Supongamos que S es un subconjunto de E. Designaremos por $<S>$ al conjunto de las combinaciones lineales de elementos de S (se llama espacio vectorial generado por S)

<u>Importante</u>: Todo subespacio vectorial de F que contenga a S deberá contener a $<S>$.

Por otra parte $<S>$ es un <u>subespacio vectorial</u>!

Si $\vec{x}, \vec{y} \in \langle S \rangle \Rightarrow \vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n$

con $\vec{x}_i \in S$ y $\vec{y} = \mu_1 \vec{y}_1 + \dots + \mu_n \vec{y}_n$

$\lambda_i \in \mathbb{K}$

con $\vec{y}_i \in S$, $\mu_i \in \mathbb{K}$ $(i = 1, \dots n)$

Entonces: $\underline{\underline{\vec{x} + \vec{y}}} = (\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n) + (\mu_1 \vec{y}_1 + \dots + \mu_n \vec{y}_n) =$

$= \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n + \mu_1 \vec{y}_1 + \dots + \mu_n \vec{y}_n \in \underline{\underline{\langle S \rangle}}$

$\lambda \vec{x} = \lambda (\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n) = \lambda \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda \lambda_n \vec{x}_n \in \langle S \rangle$

__Proposición:__ Si S es un subconjunto de un espacio vectorial E, el conjunto $\langle S \rangle$ es el menor subespacio vectorial de E que contiene a S.

-D- [dejar entregable]

__OBS:__ Si $F = \langle S \rangle$, se dice que S genera a F o que F está generado por S ó que S es un sistema generador de F.

__Ejemplos:__

1) $\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1) \rangle$ ya que para todo par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$\boxed{(x,y) = \underset{\mathbb{R}}{x} (1,0) + \underset{\mathbb{R}}{y} (0,1)}$$

2) $\mathbb{K}^n = \langle (1, 0, \overset{n)}{\ldots}, 0), (0, 1, \overset{n)}{\ldots}, 0), \ldots, (0, \overset{n)}{\ldots}, 0, 1) \rangle$

3) $\mathbb{K}[x] = \langle 1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots \rangle$
(ejemplo de sistema generador con infinitos términos)

4) Ejemplo importante de manera alternativa de demostrar que algo es un subespacio vectorial

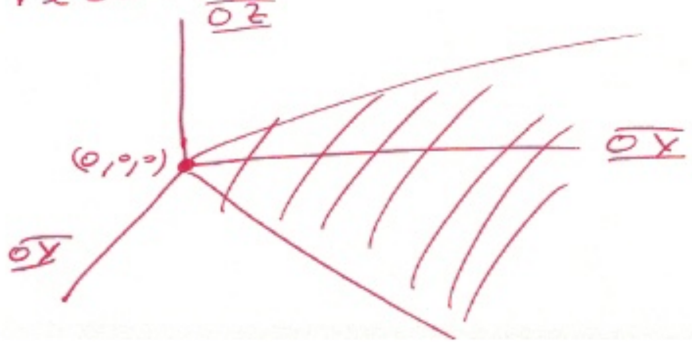
$F = \{ (x, 2z + x, z) \,/\, x, z \in \mathbb{R} \}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow$
$(x, 2z + x, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 2, 1)$

Resulta que $\boxed{F = \langle (1,1,0), (0, 2, 1) \rangle}$

Si representamos los elementos de $\mathbb{R}^3$ como ptos del espacio de la manera usual.

Los elementos de F son los ptos del plano con vectores directores $(1,1,0)$ y $(0, 2, 1)$



<u>DEF</u>: Un conjunto de vectores S se llama <u>linealmente independiente</u> si toda combinación lineal de vectores de S <u>nula</u> tiene todos sus coeficientes <u>nulos</u>:

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_n = 0}$$

En caso contrario diremos que los vectores de S son <u>linealmente dependientes</u>.

<u>Proposición</u>:
$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ son linealmente dependientes si y sólo si uno de ellos es combinación lineal de los restantes.

$\overset{-D-}{\text{"}\Longrightarrow\text{"}}$

Supongamos que $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ son l.d. $\Rightarrow$ existe una combinación lineal

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_m \vec{v}_m = \vec{0}$$ con algún

coeficiente <u>no nulo</u>. Podemos suponer que $\lambda_1 \neq 0$ (reordenando $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ si es necesario)
Entonces existe λ_1^{-1} entonces multiplicando a izq y derecha y pasando al miembro de la derecha:

$$\vec{v}_1 = -(\lambda_1)^{-1}\lambda_2 \vec{v}_2 - (\lambda_1)^{-1}\lambda_3 \vec{v}_3 - \dots - (\lambda_1)^{-1}\lambda_m \vec{v}_m$$

$\Rightarrow$ $\vec{v}_1$ es combinación lineal de los restantes vectores.

"$\Leftarrow$"

Supongamos que hay un vector combinación lineal de los restantes que puede ser el $\vec{v}_1$ sin pérdida de generalidad $\Rightarrow \exists \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ tales que $\vec{v}_1 = \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m \Rightarrow$

$1 \cdot \vec{v}_1 - \lambda_2 \vec{v}_2 - \dots - \lambda_m \vec{v}_m = \vec{0}$ es una combinación lineal nula con <u>no todos</u> sus coeficientes nulos $\Rightarrow$ linealmente dependientes

//

<u>Ejemplos:</u>

1) Un único vector $\vec{v}$ es l.i. si y sólo si $\vec{v} \neq \vec{0}$ ($\vec{v}$ no es c.l. de nadie).

2) En $\mathbb{R}^2$, $(1,0)$ y $(0,1)$ son l.i. En general en $\mathbb{K}^n$, $(1,0,\dots,0)$, $(0,1,0,\dots,0)$, $\dots$ $(0,0,\dots,0,1)$ son l.i.

3) En $\mathbb{R}^3$, $(-1,1,0)$, $(5,2,3)$ y $(0,7,3)$ son linealmente dependientes (l.d.) ya que