DEF: Un vector $\vec{u}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ si existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$$

OBS: De las condiciones (1) y (2) de la definición de subespacio vectorial resulta que toda combinación lineal de vectores $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ de F (sub. esp) es un vector de F.

$$\left(\vec{u} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\lambda_1 \underbrace{\vec{u}_1}_{\in F}}_{\in F\ (2)} + \underbrace{\lambda_2 \vec{u}_2}_{\in F}}_{\in F\ (1)} + \dots + \underbrace{\lambda_n \vec{u}_n}_{\in F}}_{\in F \dots} \right)$$

DEF: Supongamos que S es un subconjunto de E. Designaremos por $<S>$ al conjunto de las combinaciones lineales de elementos de S (se llama espacio vectorial generado por S)

Importante: Todo subespacio vectorial de F que contenga a S deberá contener a $<S>$. Por otra parte $<S>$ es un subespacio vectorial!

Si $\left.\begin{matrix}\vec{x}\\ \vec{y}\end{matrix}\right\} \in \langle S \rangle \Rightarrow \vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n$

con $\vec{x}_i \in S$ y $\vec{y} = \mu_1 \vec{y}_1 + \dots + \mu_n \vec{y}_n$

$\lambda_i \in \mathbb{K}$

con $\vec{y}_i \in S$, $\mu_i \in \mathbb{K}$ $(i = 1, \dots n)$

Entonces: $\underline{\underline{\vec{x} + \vec{y}}} = (\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n) + (\mu_1 \vec{y}_1 + \dots + \mu_n \vec{y}_n) =$

$= \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n + \mu_1 \vec{y}_1 + \dots + \mu_n \vec{y}_n \in \underline{\underline{\langle S \rangle}}$

$\lambda \vec{x} = \lambda (\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n) = \lambda \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda \lambda_n \vec{x}_n \in \langle S \rangle$

<u>Proposición</u>: Si S es un subconjunto de un espacio vectorial E, el conjunto $\langle S \rangle$ es el menor subespacio vectorial de E que contiene a S.

~~Dejar entregable~~

-D-

OBS: Si $F = \langle S \rangle$, se dice que S genera a F o que F está generado por S ó que S es un sistema generador de F.

<u>Ejemplos</u>:

1) $\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1) \rangle$ ya que para todo par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$\boxed{(x,y) = \underset{\mathbb{R}}{\underset{\Uparrow}{x}} (1,0) + \underset{\mathbb{R}}{\underset{\Uparrow}{y}} (0,1)}$$

2) $\mathbb{K}^n = \langle (1,0,\overset{n)}{\dots},0), (0,1,\overset{n)}{\dots},0), \dots, (0,\overset{n)}{\dots},0,1) \rangle$

3) $\mathbb{K}[x] = \langle 1, x, x^2, \dots, x^n, \dots \rangle$
(ejemplo de sistema generador con infinitos términos)

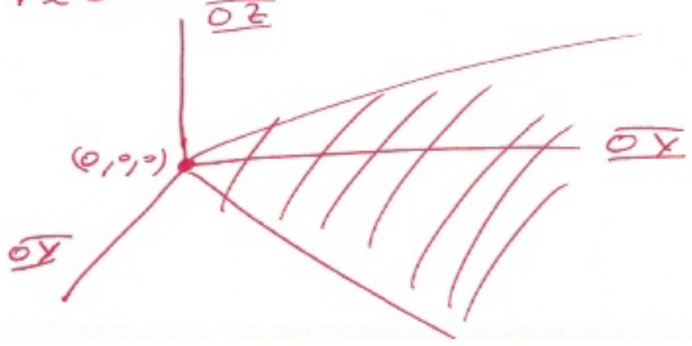
4) Ejemplo importante de manera alternativa de demostrar que algo es un subespacio vectorial

$F = \{ (x, 2z+x, z) \,/\, x, z \in \mathbb{R} \}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow$
$(x, 2z+x, z) = x(1,1,0) + z(0,2,1)$

Resulta que $\boxed{F = \langle (1,1,0), (0,2,1) \rangle}$

Si representamos los elementos de $\mathbb{R}^3$ como ptos del espacio de la manera usual.
Los elementos de F son los ptos del plano con vectores directores $(1,1,0)$ y $(0,2,1)$



<u>DEF</u>: Un conjunto de vectores S se llama <u>linealmente independiente</u> si toda combinación lineal de vectores de S <u>nula</u> tiene todos sus coeficientes <u>nulos</u>:

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_n = 0}$$

En caso contrario diremos que los vectores de S son <u>linealmente dependientes</u>.

<u>Proposición:</u>
$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ son linealmente dependientes si y sólo si uno de ellos es combinación lineal de los restantes.

-D-
"$\Longrightarrow$"
Supongamos que $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ son l.d. $\Rightarrow$ existe una combinación lineal

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m = \vec{0}$$ con algún coeficiente <u>no nulo</u>. Podemos suponer que $\lambda_1 \neq 0$ (reordenando $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_m$ si es necesario)
Entonces existe λ_1^{-1} entonces multiplicando a izq y derecha y pasando al miembro de la derecha:

$$\vec{v}_1 = -(\lambda_1)^{-1}\lambda_2 \vec{v}_2 - (\lambda_1)^{-1}\lambda_3 \vec{v}_3 - \dots - (\lambda_1)^{-1}\lambda_m \vec{v}_m \quad (E$$

$\Rightarrow$ $\vec{v}_1$ es combinación lineal de los restantes vectores.

"$\Leftarrow$"

Supongamos que hay un vector combinación lineal de los restantes que puede ser el $\vec{v}_1$ sin pérdida de generalidad $\Rightarrow \exists \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ tales que $\vec{v}_1 = \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m \Rightarrow$

$1 \cdot \vec{v}_1 - \lambda_2 \vec{v}_2 - \dots - \lambda_m \vec{v}_m = \vec{0}$ es una combinación lineal nula con <u>no todos</u> sus coeficientes nulos $\Rightarrow$ linealmente dependientes

//

<u>Ejemplos:</u>

1) Un único vector $\vec{v}$ es l.i. si y sólo si $\vec{v} \neq \vec{0}$ ($\vec{v}$ no es c.l. de nadie).

2) En $\mathbb{R}^2$, $(1,0)$ y $(0,1)$ son l.i. En general en $\mathbb{K}^n$, $(1,0,\dots,0)$, $(0,1,0,\dots,0)$, $\dots$ $(0,0,\dots,0,1)$ son l.i.

3) En $\mathbb{R}^3$, $(-1,1,0)$, $(5,2,3)$ y $(0,7,3)$ son linealmente dependientes (l.d.) ya que

$$5(-1,1,0) + (5,2,3) - (0,7,3) = (0,0,0)$$

4) En $\mathbb{K}[x]$, $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ es L.i.

DEF: Una base de un espacio vectorial E es un sistema generador linealmente independiente.

Proposición: $B \subset E$ es una base de E si y sólo si todo $\vec{u} \in E$ se expresa de manera única como combinación lineal de elementos de B.

-D-

" $\Longrightarrow$ "

Supongamos que $B \subset E$ es base de $E \Longrightarrow$ $E = \langle B \rangle$ y los elementos de B son L.i.

Supongamos que $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ y que $\vec{v} \in E$ tal que

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n$$
$$\vec{v} = \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 + \cdots + \mu_n \vec{v}_n$$

$\boxed{\lambda_1 \neq \mu_1}$ (lo asumimos si no reordenamos)

restando:

$$\vec{0} = \underbrace{(\lambda_1 - \mu_1)}_{\neq 0} \vec{v}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\vec{v}_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)\vec{v}_n$$

$\Longrightarrow \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ L.d contradicción con B base

La contradicción procede de suponer que $\vec{v}$ se puede expresar de dos modos diferentes como c. l. de los elementos de B. 1.

"$\Leftarrow$"

Supongamos que todo vector de E se expresa como c. lineal de los elementos de B de manera única $\Rightarrow E = \langle B \rangle$

Veamos ahora que los elementos de B son L.i.:

Si $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$ pero

$0 \vec{v}_1 + 0 \vec{v}_2 + \dots + 0 \vec{v}_n = \vec{0} \underset{\text{por la unicidad}}{\Rightarrow}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow$ Li.

Así B es base de E al ser $\underbrace{\text{s.g.}}_{\text{sistema generador}}$ $\underbrace{\text{L.i.}}_{\text{linealmente independiente}}$

<u>Proposición</u>: Si S es linealmente independiente y $\vec{u} \notin \langle S \rangle$ entonces $S \cup \{\vec{u}\}$ es linealmente independiente.

-D-

Supongamos que S l.i. y $\vec{u} \notin \langle S \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ¿ $S \cup \{\vec{u}\}$ li?

Supongamos que $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$

$\circledast\ [\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n + \mu \vec{u} = \vec{0}\,]$

$\mu = 0$ ya que si $\mu \neq 0 \Rightarrow \vec{u} = -\frac{\lambda_1}{\mu}\vec{v}_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\mu}\vec{v}_n$

$\Rightarrow \vec{u} \in \langle S \rangle$ y sabemos que $\vec{u} \notin \langle S \rangle$

Así es que $\mu = 0$ y $\circledast\ \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda \vec{v}_n = \vec{0}$.

Como $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ son l.i. $\Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$

Así $\mu = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \Rightarrow S \cup \{\vec{u}\}$ l.i.

\#

<u>Teorema</u>: Todo espacio vectorial $E \neq \{\vec{0}\}$ generado por un número finito de vectores tiene una base finita.

-D-

Sea $E = \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle$. Si los generadores son l.i. entonces forman base y ya está. En caso contrario hay uno, pongamos $\vec{v}_i$ que es combinación lineal del resto. Entonces

$$E = \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n \rangle$$

Si este nuevo conjunto de generadores es l.i. termino, si no repito el proceso tantas veces como sea necesario eliminando aquellos generadores que sean c.l. del resto. Llegamos así a un conjunto de vectores L.i. ó a la eliminación de todos (que en ese caso sería $E = \{\vec{0}\}$ y esto no puede ser por hipótesis, por tanto obtengo una base finita. //

<u>OBS</u>: Todo sistema generador puede reducirse a una base. (Una base es un s.g. minimal)

<u>Ej</u>:

1) Los vectores $(1,0,\ldots,0), (0,1,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,1)$ forman una base de $\mathbb{K}^n$.

2) El conjunto $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ es una base de $\mathbb{K}[X]$ (¡ojo! con infinitos elementos)

3) Sea $E_{ij} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccc} 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{array}\right) & \leftarrow i \\ \quad\quad\quad\uparrow j & \end{array}$ base de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

4) Los vectores $(1,1,0), (0,2,1)$ forman una base del subespacio vectorial
$$F = \{(x, 2z+x, z) \,/\, x,z \in \mathbb{R}\}$$

<u>Teorema</u> (Steinitz)

Sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ una base del espacio vectorial E y sean $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ vectores, linealmente independientes. Entonces se pueden sustituir m vectores de la base $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ por $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ obteniendo una nueva base.

En particular $\boxed{m \leq n}$

$$\vec{u}_1 \; - - \; \cancel{\vec{u}_i} \; - - \; \vec{u}_n$$
$$\vec{v}_i$$
$$\vec{v}_1 - - - \vec{v}_m$$

-D-

<u>Ejer entregable</u>.

<u>Corolario</u>: Si el espacio vectorial E tiene una base finita, todas las bases de E tiene el mismo número de vectores.

-D-

Sea $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ dos bases de
$\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$
E. Aplicando Steinitz a $\mathcal{B}$ considerando $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ como conjunto li tenemos $\boxed{m \leq n}$

Aplicando el argumento a la base $\mathcal{B}'$ considerando $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ como conjunto de elementos L.i. $\Rightarrow \boxed{n \leq m}$

Así $\boxed{m \leq n}$ y $\boxed{n \leq m} \Rightarrow \boxed{n = m}$ //

<u>DEF:</u> La dimensión de un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es el número de elementos de una de sus bases si son finitas. Si no lo son diremos que E es <u>de dimensión infinita</u>

<u>Ej:</u>

$\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

$\dim(\mathbb{K}^n) = n$

$\dim(\mathbb{K}[X]) = \infty$

$\dim(\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})) = m \cdot n$.