Conjuntos de números:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ naturales (contar)

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ (enteros)

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \,/\, p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$ (racionales)

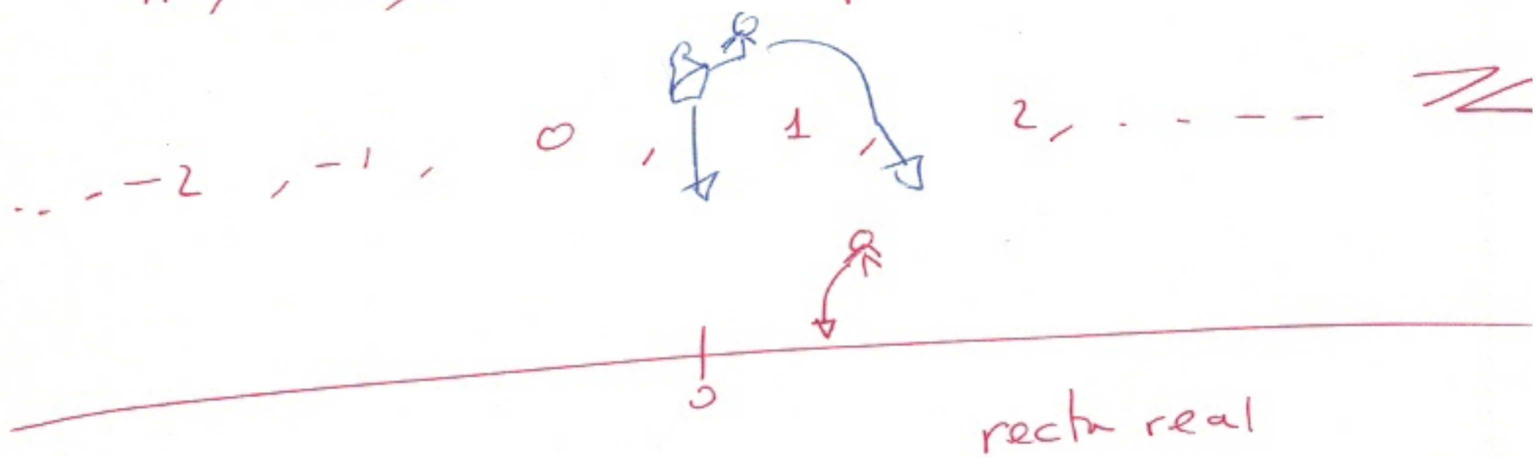
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}\mathbb{R}$ irracionales ($\sqrt{2}, e, \pi, \dots$)

unión

Crisis de los pitagóricos)

Tamaños del infinito

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \equiv$ infinito numerable



Propiedad arquimediana:

Entre dos números reales siempre existe otro: $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \exists z \mid x < z < y$

para todo · existe · tal que

$\mathbb{C} = \{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, \underline{i^2 = -1} \}$

$i \equiv$ unidad imaginaria.

$a + bi$

a → parte real

bi → parte imaginaria.

$$(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)\, i$$

¿Por qué surgen los complejos?

$x^2 + 1 = 0$ No tiene solución en $\mathbb{R}$

La sol. es $\boxed{i} \to \boxed{i^2 = -1}$

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ tienen estructura de cuerpo conmutativo; esto quiere decir que existen dos operaciones internas una llamada suma (+) y otra llamada producto (·) de modo que si operamos dos ptos de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ con esas operaciones obtenemos ptos de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

(1) $(\cdot)$ $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ (asociativa)

(2) $(\cdot)$ $a\cdot b = b\cdot a$ (conmutativa)

(3) $(\cdot)$ $\exists$ elemento unidad, $\exists\, 1 \in A \ni 1\cdot a = a\cdot 1 = a$ $\forall a \in A$

(4) $(\cdot)$ $\exists$ elemento inverso $\forall a \in A \setminus \{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{neutro de} \\ \text{la suma}}}{0}\} \Rightarrow \exists\, \underset{\substack{\Uparrow \\ A}}{a^{-1}} \ni$

$$a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{elemento unidad}}}{1}.$$

Con la suma y el producto ordinario $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ tienen estructura de cuerpos conmutativos.

Les vamos a llamar escalares y van a ser nuestros conjuntos de números para definir la estructura que queremos

ESPACIO VECTORIAL SOBRE UN CUERPO.

DEF: Si no decimos lo contrario $\mathbb{K}$ representará un cuerpo conmutativo. Un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ es un conjunto $E \neq \emptyset$ ← vacío junto con dos operaciones (+), una interna llamada suma y otra externa $(\cdot)$ llamada producto por escalares que verifican

$\boxed{(+)}$ (1) $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ (asociativa)

$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$

(2) $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ (conmutativa)

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E$.

(3) $\exists\ \vec{0} \in E$ tal que $\vec{0}+\vec{u} = \vec{u}$

$\forall \vec{u} \in E$ ($\vec{0}$ elemento neutro de la suma)

(4) $\forall \vec{u} \in E$, $\exists -\vec{u} \in E$ tal que

$\vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{0}$ $\left(\vec{u}+(-\vec{u}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{abuso de notación.}}}{=\vec{u}-\vec{u}} = \vec{0}\right)$

(existencia elemento inverso)

$$\begin{aligned} (+) : E \times E &\longrightarrow E \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\rightsquigarrow \vec{u}+\vec{v} \\[1em] (\cdot) : \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, \vec{u}) &\rightsquigarrow \lambda \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

$(\cdot)$

(5) $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$

(6) $(\lambda+\mu)\vec{u} = \lambda\vec{u}+\mu\vec{u}$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ $\forall \vec{u} \in E$. ((5),(6) distributivas)

(7) $(\lambda \cdot \mu)\vec{u} = \lambda(\mu\vec{u})$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ $\forall \vec{u} \in E$

(8) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ $\forall \vec{u} \in E$ donde 1 es la unidad de $\mathbb{K}$

$(E,+,\cdot)$ satisfaciendo (1) - (8) se le llama espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

<u>Propiedades</u>: De la definición se deduce fácilmente que:

1) $\boxed{0 \cdot \vec{v} = \vec{0}}$

-D-

propiedad en $\mathbb{K}$.

(7)

$$0 \cdot \vec{v} = (0+0)\vec{v} = 0 \cdot \vec{v} + 0\vec{v} \Rightarrow$$

$$\underbrace{0\vec{v} - 0\vec{v}}_{\overset{(4)}{=}\,\vec{0}} = 0\vec{v} \Rightarrow \boxed{0 \cdot \vec{v} = \vec{0}} \#$$

2) $\boxed{\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}}$

-D-

(5)

$$\lambda \vec{0} = \lambda(\vec{0} + \vec{0}) = \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\lambda\vec{0} - \lambda\vec{0}}_{\overset{(4)}{=}\,\vec{0}} = \lambda\vec{0} \Rightarrow \boxed{\lambda\vec{0} = \vec{0}} \#$$

3) $\lambda \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0 \ \vee \ \vec{v} = \vec{0}$

ó en modo matemático.

-D-

Si $\lambda \neq 0 \Rightarrow \exists\, \lambda^{-1} \in \mathbb{K} \ \ni\ \lambda^{-1} \cdot \lambda = 1$

unidad del cuerpo.

Multiplicando $\lambda\vec{v} = \vec{0}$ a izq. y derecha por λ^{-1} tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^{-1}(\lambda\vec{v}) = \lambda^{-1}\cdot\vec{0} \underset{\substack{\uparrow \\ (2)\text{ de este pto}}}{=} \vec{0} \\ \quad \| \leftarrow (6) \\ (\lambda^{-1}\lambda)\vec{v} \underset{\substack{\uparrow \\ (8)}}{=} 1\cdot\vec{v} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{0}}\,.$$

Así si $\lambda \neq 0 \Longrightarrow \vec{v} = \vec{0}$ ($a \Rightarrow b$ verdad entonces $\underset{\text{no}}{\neg b} \Rightarrow \underset{\text{no}}{\neg a}$

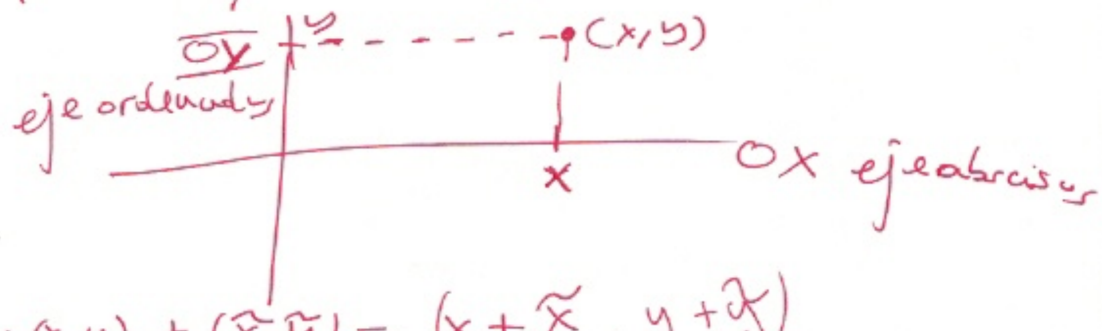
$$\Longrightarrow \neg(\vec{v} = \vec{0}) \Longrightarrow \neg(\lambda \neq 0) \Longleftrightarrow$$

$$\boxed{\vec{v} \neq \vec{0} \Longrightarrow \lambda = 0}$$

#

Ejemplos de espacios vectoriales:

1) $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \;/\; x, y \in \mathbb{R}\}$



$$\begin{cases} (+): (x,y) + (\tilde{x},\tilde{y}) = (x+\tilde{x},\, y+\tilde{y}) \\ (\cdot): \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y) \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{K} (= \mathbb{R})$$

Con (+) y (·) $\mathbb{R}^2$ tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Demostración: