$<S>$ es el menor subespacio vectorial de E que contiene a S.

-D-

Sea F un subespacio de E que contiene a S.

Veamos que $<S> \subset F$.

Sea $\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n \in <S>$ $\left(\begin{array}{l}\lambda_i \in \mathbb{K} \quad i=1,\dots \\ x_i \in S\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ como $\vec{x}_i \in S \subset F \Rightarrow \vec{x}_i \in F \Rightarrow$

$\underbrace{\lambda_1 \vec{x}_1}_{\in F} + \dots + \underbrace{\lambda_n \vec{x}_n}_{\in F} \in F$ ya que F subespa

$\Rightarrow <S> \subset F$ #

Ejercicios:

1 a) Si $b \neq 0 \Rightarrow A$ no subespacio

Sea $(x_1, y_1, z_1, t_1) \in A \Rightarrow x_1 + 2y_1 - z_1 + t_1 = b$

$(x_2, y_2, z_2, t_2) \in A \Rightarrow x_2 + 2y_2 - z_2 + t_2 = b$

$(x_1, y_1, z_1, t_1) + (x_2, y_2, z_2, t_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$

¿ $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2) \in A$?

$(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) + (t_1 + t_2) =$

$= \underbrace{(x_1 + 2y_1 - z_1 + t_1)}_{b} + \underbrace{(x_2 + 2y_2 - z_2 + t_2)}_{b} = 2b$

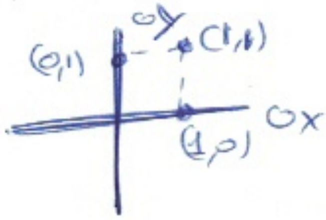
Cuando $2b = b$ sólo si $\boxed{b = 0}$

Si $b \neq 0 \Rightarrow (x_1, y_1, z_1, t_1) + (x_2, y_2, z_2, t_2) \notin A$

Si $b = 0 \Rightarrow (x_1, y_1, z_1, t_1) + (x_2, y_2, z_2, t_2) \in A$

(Idem con $\lambda \cdot (x_1, y_1, z_1, t_1) \in A$)

b) $B = \{ (x, y) / x \cdot y = 0 \}$ de $\mathbb{R}^2$



B no subespacio

$(1, 0) \in B$ pero $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin B$

$(0, 1) \in B$

c) $C = \{ (x, y, z, t) / \begin{matrix} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 2\alpha \\ t = 5\alpha \end{matrix} \quad \alpha \in \mathbb{R} \}$ de $\mathbb{R}^4$

$(x, y, z, t) \in C \Leftrightarrow (x, y, z, t) = (\alpha, \alpha, 2\alpha, 5\alpha) =$
$= \alpha (1, 1, 2, 5) \Rightarrow$

$C = \langle (1, 1, 2, 5) \rangle \Rightarrow \boxed{C \text{ subespacio}}$

d) $D = \{ (x, y, z, t) / \begin{matrix} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{matrix} \}$ de $\mathbb{R}^4$

$(x, y, z, t) \in D \Rightarrow \begin{matrix} x + y = 0 \Rightarrow x = -y \\ y - z = 0 \Rightarrow y = z \end{matrix}$

$(x, y, z, t) \in D \Leftrightarrow (x, y, z, t) = (-y, y, y, t) =$
$= y (-1, 1, 1, 0) + t (0, 0, 0, 1) \Rightarrow$

$D = \langle (-1,1,1,0), (0,0,0,1) \rangle$

e) $E = \{ (x,y) \,/\, x^2 = b,\ b \in \mathbb{R}^+ \}$ de $\mathbb{R}$

$\uparrow$
$b > 0$

No subespacio: $(x_1, y_1) \in E \to x_1^2 = b$

$(x_2, y_2) \in E \to x_2^2 = b$

¿$(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in E$?

$$(x_1 + x_2)^2 = \underset{\overset{\|}{b}}{x_2^2} + \underset{\overset{\|}{b}}{x_2^2} + 2x_1x_2 = 2b + 2x_1x_2$$

$$2b + 2x_1x_2 = b$$

$$2b - b = -2x_1x_2$$

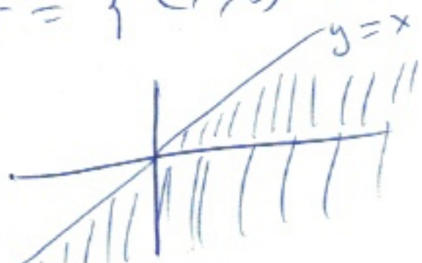
$$b = -2x_1x_2$$

$$x_1x_2 = \frac{-b}{2}$$

$$\underset{\overset{\|}{b \cdot b}}{(x_1x_2)^2} = \frac{b^2}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{b^2}{4} \quad \text{No}$$

$\Rightarrow$ nunca es subespais si $b > 0$.

f) $F = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq y \}$



cuadrantes positivos.

$x_1 \geq y_1 \Rightarrow x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$

$x_2 \geq y_2$ F s

$x_1, y_1 \geq 0$

$x_2, y_2 \geq 0$

No subespais

$(2,1) \in F \quad 2 \geq 1$

$-1(2,1) = (-2,-1) \notin F$

$\boxed{-2 \leq -1}$

Ej: a) si $b=0$

$A = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+2y-z+t=0\}$

Si $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \Rightarrow x = -2y+z-t \Rightarrow$

$(x,y,z,t) = (-2y+z-t, y, z, t) =$

$= y(-2,1,0,0) + z\cdot(1,0,1,0) + t(-1,0,0,1)$

$\Rightarrow A = \langle (-2,1,0,0), (1,0,1,0), (-1,0,0,1) \rangle$

Es obvio que $(-2,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$ y $(-1,0,0,1)$ son l.i.

$\lambda(-2,1,0,0) + \mu(1,0,1,0) + \gamma(-1,0,0,1) = (0,0,0,0)$

$$\begin{array}{l} -2\lambda + \mu - \gamma = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \gamma = 0 \end{array} \Rightarrow \lambda = \mu = \gamma = 0 \Rightarrow \text{l.i.}$$

Así que $\{(-2,1,0,0), (1,0,1,0), (-1,0,0,1)\}$ es base de A. si ($b=0$).

c) $G = \langle (1,1,2,5) \rangle \Rightarrow$ base de G $\{(1,1,2,5)\}$

d) $D = \langle (-1,1,1,0), (0,0,0,1) \rangle \Rightarrow$ como $(0,0,0,1)$ no se puede poner como c.l. de $(-1,1,1,0)$ son l.i. y por tanto base.

(3) ¿ a, b ?

$(1,0,a,b) \in \langle (1,4,-5,2), (1,2,3,-1) \rangle$

$\exists \alpha, \beta$ /$ (1,0,a,b) = \alpha(1,4,-5,2) + \beta(1,2,3,-1)$

$\Rightarrow (1,0,a,b) = (\alpha+\beta, 4\alpha+2\beta, -5\alpha+3\beta, 2\alpha-\beta)$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 0 = 4\alpha + 2\beta \\ a = -5\alpha + 3\beta \\ b = 2\alpha - \beta \end{cases}$ sistema compatible.

$$\begin{array}{r} -4 = -4\alpha - 4\beta \\ 0 = 4\alpha + 2\beta \\ \hline -4 = -2\beta \end{array} \Rightarrow \beta = \frac{-4}{-2} = 2, \boxed{\beta = 2}$$

$\alpha = 1 - \beta = 1 - 2 = -1 \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$

$a = -5(-1) + 3 \cdot 2 = 5 + 6 = 11$

$\boxed{a = 11}$

$b = 2 \cdot (-1) - 2 = -2 - 2 = -4$

$\boxed{b = -4}$

(4) V esp. vect de dimensión n.
dim (V) = n. Demuestra las ciertas y
pon contraejemplos de las falsas.

1) FALSO en $\mathbb{R}^2$

$\{(1,0), (2,0), (3,0)\}$ no generan $\mathbb{R}^2$

2) $m < n$ vectores son siempre L.I.
FALSO. En $\mathbb{R}^3$
$\{(1,0,0), (2,0,0)\}$ son L.D.

3) Un sistema linealmente independiente
con n vectores es generador de V (verdadero)

-D-
Sabemos que $\boxed{\dim(V) = n}$ $\Rightarrow$ todos los
bases de V tienen n vectores.

$\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ L.i. $\Rightarrow$ es S.g. si
no fuese s.g. $\Rightarrow$ puedo tomar $\vec{u} \notin \langle \vec{v}_1, \dots$
y $\underbrace{\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \cup \{\vec{u}\}}_{= S'}$ sería L.i. $\Rightarrow$
si S' s.g. paro y si no complemento con
vectores L.i. hasta obtener un s.g. pero
habré conseguido una base con más de n
vectores $\Rightarrow$ CONTRADICCIÓN.