Proposición: Sea F un subespacio del espacio vectorial E. Si la dimensión de E es finita, la de F también lo es y

$$\dim(F) \leq \dim(E)$$

Además $\dim(F) = \dim(E) \Longleftrightarrow F = E$

Fórmula de Grassmann. Suma directa de subespacios. (pág 77)

Sea E un espacio vectorial y F, G dos subespacios de E.

Proposición: $F \cap G$ es un subespacio vectorial de E.

-1-

ejer.

OBS: En general, $F \cup G$ no es un subespacio vectorial de E. El motivo es que la suma de un vector de F y un vector de G puede no pertenecer ni a F ni a G.

Ejemplo: Consideremos los subespacios $F = \{(x,0) / x \in \mathbb{R}\}$ y $G = \{(0,y) / y \in \mathbb{R}\}$. La suma $(1,0) + (0,1)$ no pertenece ni a F ni a G.

Para evitar trabajar con conjuntos que no son subespacios vectoriales normalmente consideraremos, en lugar de la unión $F \cup G$, el subespacio vectorial generado por esta unión. Este subespacio es:

$$\{u+v \mid u \in F, v \in G\}$$

En efecto, es fácil ver que este es el menor subespacio vectorial que contiene a F y a G. Lo llamaremos suma de F y G y lo designaremos por $F+G$.

Teorema (Fórmula de Grassmann). Sean F y G dos subespacios vectoriales de E y supongamos que la dimensión de E es finita. Entonces F, G, $F\cap G$ y $F+G$ son todos ellos de dimensión finita y

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F\cap G).$$

Dem: (ejercicio)

OBS:

Si $F\cap G = \{\vec{0}\}$, diremos que la suma de $F+G$ es una suma directa y escribiremos $F\oplus G$.

La Fórmula de Grassmann dice que la suma es directa ⇒

$$\dim(F\oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

Proposición: La suma $F+G$ es directa si y sólo si la expresión de un vector de $F+G$ como suma de un vector de F y un vector de G es única.

"⇒" Supongamos que $F+G$ es directa ⇒ $F\cap G = \vec{0}$ y que $\exists\, u \in F+G \mid u = u_1+v_1 = u_2+v_2$ con $\begin{cases} u_i \in F \\ v_i \in G \end{cases}$ $i=1,2$.

$$\Rightarrow \underbrace{u_1-u_2}_{\in F} = \underbrace{v_2-v_1}_{\in G} \Rightarrow \begin{matrix} u_1-u_2=0 \\ v_2-v_1=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} u_1=u_2 \\ v_1=v_2 \end{cases} \Rightarrow$$

⇒ expresión única

"⇐" Suponemos que la expresión es única ⇒ sea $u \in F\cap G$ ⇒ $\underbrace{u}_{F} - \underbrace{u}_{G} = 0 = 0+0 \underset{\text{unicidad}}{\Rightarrow} \boxed{u=0} \Rightarrow$

⇒ suma directa #

V espacio vectorial de dimensión n. (1)

CAMBIOS DE BASE

$\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ base

$\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ base.

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \equiv \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(\vec{v})$$

$$\vec{v} = \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 + \dots + \mu_n \vec{v}_n$$

$$(\mu_1, \dots, \mu_n) \equiv \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}'}(\vec{v})$$

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} p_j^i \vec{u}_j$$

$$(p_1^i, \dots, p_n^i) \equiv \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(\vec{v}_i)$$

$$\vec{v} = \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 + \dots + \mu_n \vec{v}_n = \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 + \dots + \mu_n \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^n \vec{u}_j\right) =$$

$$= \mu_1 \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^1 \vec{u}_j\right) + \mu_2 \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^2 \vec{u}_j\right) + \dots + \mu_n \left(p_1^n \vec{u}_1 + \dots + p_n^n \vec{u}_n\right) =$$

$$= \mu_1 \left(p_1^1 \vec{u}_1 + \dots + p_n^1 \vec{u}_n\right) + \mu_2 \left(p_1^2 \vec{u}_1 + \dots + p_n^2 \vec{u}_n\right) + \dots$$

$$= \left(\mu_1 p_1^1 + \mu_2 p_1^2 + \dots + \mu_n p_1^n\right) \vec{u}_1 + \left(\mu_1 p_2^1 + \mu_2 p_2^2 + \dots + \mu_n p_2^n\right) \vec{u}_2 +$$

$$+ \dots + \left(\mu_1 p_n^1 + \mu_2 p_n^2 + \dots + \mu_n p_n^n\right) \cdot \vec{u}_n$$

por la

Por otro lado $\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$

unicidad:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 p_1^1 + \mu_2 p_1^2 + \dots + \mu_n p_1^n \\ \lambda_2 = \mu_1 p_2^1 + \mu_2 p_2^2 + \dots + \mu_n p_2^n \\ \vdots \\ \lambda_n = \mu_1 p_n^1 + \mu_2 p_n^2 + \dots + \mu_n p_n^n \end{cases}$$

En forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}}_{\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(\vec{v})} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ \vdots \\ p_n^1 \end{matrix}}_{\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1)} & \underbrace{\begin{matrix} p_1^2 \\ p_2^2 \\ \vdots \\ p_n^2 \end{matrix}}_{\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(\vec{v}_2)} & \cdots & \underbrace{\begin{matrix} p_1^n \\ p_2^n \\ \vdots \\ p_n^n \end{matrix}}_{\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(\vec{v}_n)} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}}_{\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}'}(\vec{v})}$$

$$P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \equiv \text{matriz de cambio de base de } \mathcal{B}' \text{ a } \mathcal{B}$$

En columna coordenadas de los vectores de la ~~[illegible]~~ primera base ~~[illegible]~~ en la segunda