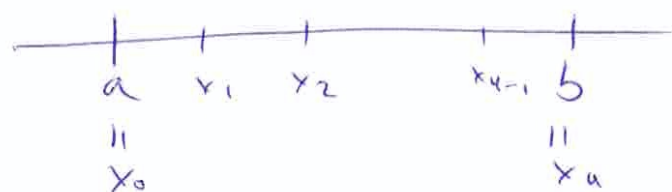


# La integral de Riemann:

Sea  $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada

DEF: Definimos partición del intervalo  $[a, b]$  como una cantidad finita de puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  tales que

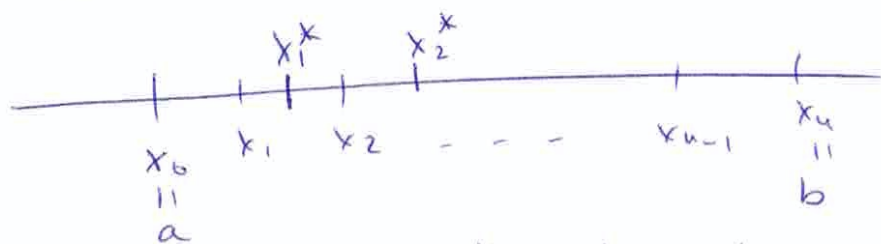
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$



La denotaremos por  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

~~dos~~ <sup>dos</sup> particiones  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{P}'$  del mismo intervalo

$[a, b]$  diremos que  $\mathcal{P}'$  es más fina que  $\mathcal{P}$  si  $\mathcal{P}'$  contiene a todos los pts de  $\mathcal{P}$  y a algunos más. ( $\mathcal{P}' \supset \mathcal{P}$ )



$$\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{x_1^*, x_2^*, \dots\}$$

~~En las condiciones anteriores, definiremos la~~  
En las condiciones anteriores, definiremos la  
suma superior de Riemann e inferior asociada

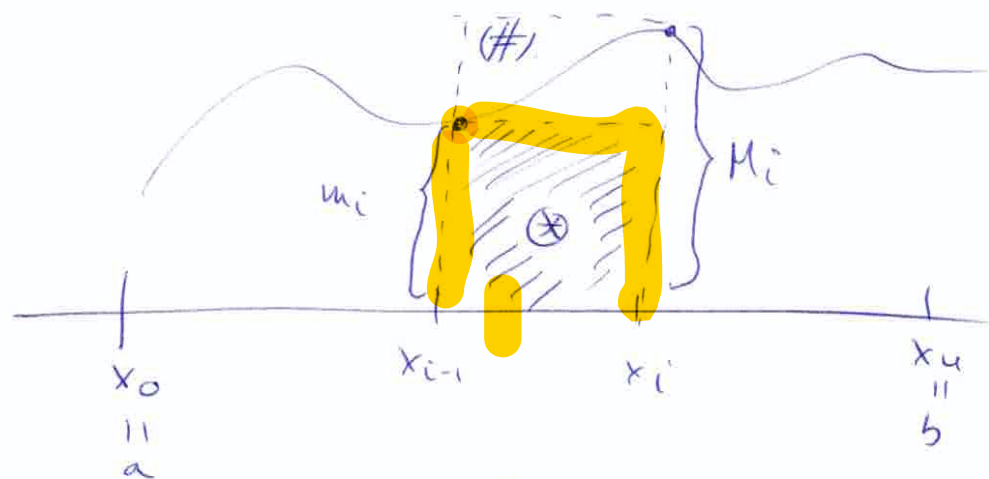
a una partición:

$$S'(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1})$$

donde  $M_i = \sup \{ f(x) / x \in [x_{i-1}, x_i] \}$   $i=1, \dots, n$ .

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1})$$

donde  $m_i = \inf \{ f(x) / x \in [x_{i-1}, x_i] \}$   $i=1, \dots, n$ .



$$m_i (x_i - x_{i-1}) = \text{area } \otimes$$

$$M_i (x_i - x_{i-1}) = \text{area } (\#)$$

Lema (Comportamiento sumas superiores e inferiores, al refinar)

Sean  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{P}'$  dos particiones del intervalo  $[a, b]$  tales que  $\mathcal{P}'$  es más fina que  $\mathcal{P}$ .

Entonces:

$$1) S'(f, \mathcal{P}') \leq S'(f, \mathcal{P})$$

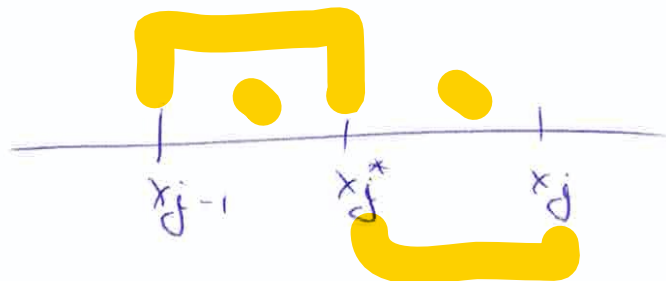
(Las sumas superiores decrecen al refinar)

$$2) s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P}')$$

(Las sumas inferiores crecen al refinar)

-D-

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{x_j^*\}$  y a que si  $\mathcal{P}'$  contiene más puntos aplicamos el resultado para particiones con un pto de más tantos veces sea necesario.



Caso sumas superiores:

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} M_i (x_i - x_{i-1}) + M_j (x_j - x_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} M_i (x_i - x_{i-1}) + M_j (x_j - x_j^* + x_j^* - x_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} M_i (x_i - x_{i-1}) + M_j (x_j - x_j^*) + M_j (x_j^* - x_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

$$\text{Notemos que si } M_j^1 = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j^*] \}$$

$$M_j^2 = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_j^*, x_j] \}$$

$$\text{Entonces } M_j^1, M_j^2 \leq M_j \quad \text{Así}$$

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{j-1} M_i (x_i - x_{i-1}) + M_j (x_j - x_j^*) + M_j (x_j^* - x_{j-1}) + \\ &+ \sum_{i=j+1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{j-1} M_i (x_i - x_{i-1}) + M_j^2 (x_j - x_j^*) + \\ &+ M_j^1 (x_j^* - x_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) = S(f, \mathcal{P}') \end{aligned}$$

(4)

En el caso de las sumas inferiores, la prueba es idéntica teniendo en cuenta que si

$$u_j^+ = \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j^*] \}$$

$$u_j^- = \inf \{ f(x) \mid x \in [x_j^*, x_j] \}$$

Entonces  $u_j \leq u_j^+, u_j^-$

Sea  $\Delta_s := \{ s(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ partición de } [a, b] \}$

$\Delta_{s'} := \{ s'(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ partición de } [a, b] \}$

Notemos que  $\Delta_s$  está acotado superiormente por cualquier suma superior y  $\Delta_{s'}$  está acotado inferiormente por cualquier suma inferior.

DEF: En las condiciones anteriores definimos

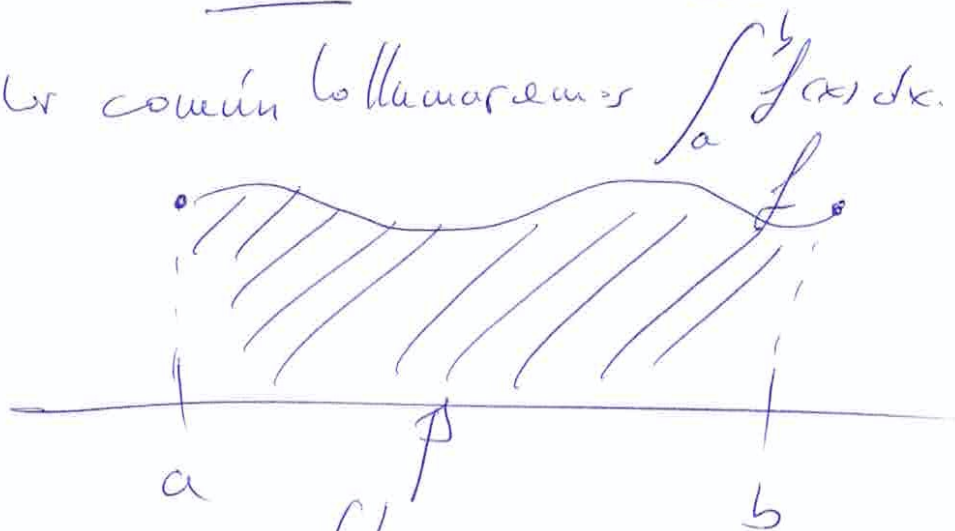
$$\int_a^b f(x) dx = \inf \Delta_{s'}$$

↑  
integral superior de  
Riemann

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \Delta_s$$

↑  
integral inferior de  
Riemann

Diremos que  $f$  es integrable en el sentido de Riemann si  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$  y a ese valor común lo llamaremos  $\int_a^b f(x) dx$ . (5)



$\int_a^b f(x) dx = \text{Área que queda bajo la gráfica de } f \text{ entre } x=a \text{ y } x=b.$

DEF: Sea  $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  acotada diremos que  $F: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una primitiva de  $f$  si  $F$  es derivable  $(a, b)$  y  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$ .

OBS: Todas las primitivas de una función son iguales excepto en una cte..

- D -  
Sean  $F$  y  $G$  dos primitivas de  $f$   
entonces  $F'(x) = f(x)$   
 $G'(x) = f(x) \Rightarrow F'(x) - G'(x) =$   
 $= f(x) - f(x) = 0$

$$\Rightarrow (F-G)'(x) = 0 \Rightarrow \exists k = cte \text{ tal que } \boxed{F(x) - G(x) = k \quad \forall x} \quad \#$$

Teorema (Fundamental del cálculo Integral).

Sea  $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $c \in (a, b)$  entonces,  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$  es una primitiva de  $f$  en  $c$  (i.e.,  $F'(c) = f(c)$ ).

Corolario (Regla de Barrow)  $f$  continua en  $[a, b]$ .

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) \text{ donde}$$

$G$  es una primitiva de  $f$ .

-D-

Sea  $G$  una primitiva de  $f \xRightarrow[\text{TFC}]{\text{TFC}} G(x) = F(x) + k$

$$\text{donde } F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$G(b) = F(b) + k = \int_a^b f(t) dt + k$$

$$G(a) = F(a) + k = \underbrace{\int_a^a f(t) dt}_{=0} + k$$

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t) dt + k - k = \int_a^b f(t) dt \quad \#$$

⑦

Dem (Teorema fundamental del cálculo)

$f$  continua en  $c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall |x - c| < \delta \Rightarrow$   
 $\Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon. (*)$

Hede probar que  $F'(c) = f(c)$  para  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c) \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall |x - c| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| < \varepsilon$$

Sea  $\varepsilon > 0$  y tomo  $\delta > 0$  el que me sale de la continuidad de  $f$  en  $c$   $(*) \Rightarrow$

$$\left| \frac{1}{x-c} \left( \int_a^x f(t) dt - \int_a^c f(t) dt \right) - \frac{1}{x-c} \int_c^x f(c) dt \right| =$$

$$\frac{1}{x-c} \int_c^x f(t) dt$$

$$= \frac{1}{|x-c|} \left| \left( \int_c^x f(t) dt - \int_c^x f(c) dt \right) \right| =$$

$$= \frac{1}{|x-c|} \left| \int_c^x (f(t) - f(c)) dt \right| \leq \frac{1}{|x-c|} \int_c^x |f(t) - f(c)| dt$$

$$\leq \frac{1}{|x-c|} \int_c^x \varepsilon dt = \frac{1}{|x-c|} \varepsilon |x-c| = \varepsilon$$

(3)

$$\int \frac{Mx+N}{(x-(a+bi)) \cdot (x-(a-bi))} dx = \otimes$$

$$\begin{aligned} (x-(a+bi)) \cdot (x-(a-bi)) &= x^2 - x(a-bi) - x(a+bi) + (abi) \cdot (a-bi) = \\ &= x^2 - \cancel{ax} + \underbrace{xbi}_{-ax} - \underbrace{xi}_{-ax} + a^2 - (bi)^2 = \\ &= \boxed{x^2 - 2ax + a^2 + b^2} \end{aligned}$$

$$\otimes = \int \frac{Mx+N}{x^2-2ax+a^2+b^2} dx$$

$$x^2 + \alpha x + \beta = (x \pm p)^2 \pm q \quad \begin{matrix} \text{si } p, q \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \quad \frac{1}{2} (x+p)^2 + q =$$

$$= x^2 + 2px + p^2 + q \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 2p = \alpha \Rightarrow p = \alpha/2 \\ p^2 + q^2 = \beta \Rightarrow q^2 = \beta - p^2 \end{matrix}$$

$$q^2 = \beta - (\alpha/2)^2 = \beta - \frac{\alpha^2}{4}$$

$$\boxed{q = \pm \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}}$$

$$\text{Asi } \otimes = \int \frac{Mx+N}{(x+p)^2+q} dx = M \underbrace{\int \frac{x}{(x+p)^2+q} dx}_{\text{I}} + N \underbrace{\int \frac{dx}{(x+p)^2+q}}_{\text{II}}$$

$$I = \int \frac{x}{(x+p)^2+q} dx = \int \frac{x+p-p}{(x+p)^2+q} dx =$$

$$= \int \frac{x+p}{(x+p)^2+q} dx - p \underbrace{\int \frac{dx}{(x+p)^2+q}}_{\text{II}}$$

$$I = \int \frac{x+p}{(x+p)^2 + q} dx - p II = \left[ t = (x+p)^2 + q \right] = \textcircled{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt - p II = \frac{1}{2} \log(|t|) - p II + K =$$

$$= \frac{1}{2} \log[(x+p)^2 + q] - p II$$

$$II = \int \frac{dx}{(x+p)^2 + q} = \frac{1}{q} \int \frac{dx}{\frac{(x+p)^2}{q} + 1} =$$

$$= \frac{1}{q} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+p}{\sqrt{q}}\right)^2 + 1} = \left[ t = \frac{x+p}{\sqrt{q}}, dt = \frac{1}{\sqrt{q}} dx \right] =$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{q}}{q} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{q}} \int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q}} \arctan(t) = \frac{1}{\sqrt{q}} \arctan\left(\frac{x+p}{\sqrt{q}}\right)$$

$$\text{Ans} \int \frac{(Mx+N) dx}{(x-(a+bi))(x-(a-bi))} = \frac{M}{2} \log((x+p)^2 + q) + (-p+N) \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{q}} \arctan\left(\frac{x+p}{\sqrt{q}}\right) \right] + K$$