Ejercicio

Desarrolla los binomios $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ y $(a+b)^5$.

Solución.

Utilizaremos el triángulo de Tartaglia:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Recordamos que este triángulo nos da los números combinatorios:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & \\
 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & \\
 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & \\
\binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Con estos datos podemos calcular los binomios solicitados:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^3 + b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

REPASO DE PRIMITIVAS

8. Consideraciones generales

El cálculo de primitivas es el proceso contrario al de derivación. Dada una función real de variable real $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, entendemos por *primitiva* de f a una función $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivable y tal que $F'(c)=f(c)$ para todo $c\in(a,b)$.

Observación.

- *La primitiva de una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ no es única.*
- *Dos primitivas de una misma función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, F y G difieren en una constante. La prueba de esta segunda parte de la observación consisten en ver que la función $H(x)=F(x)-G(x)$ es una función constante, lo cual se consigue demostrando que la derivada de H es 0.*

  $H'(x)=F'(x)-G'(x)=f(x)-g(x)=0$, *luego H es constante.*

8.1. Primitivas inmediatas

Sólo sabiendo derivar podemos conocer la primitiva de una amplia variedad de funciones, el conocimiento de dichas primitivas (elementales) junto con algunas técnicas serán suficientes para poder calcular primitivas de una amplia variedad de funciones.

1. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + K, \qquad a > 0, a \neq 1, I = (-\infty, +\infty),$
2. $\int e^x \, dx = e^x + K, \qquad I = (-\infty, +\infty)$
3. $\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + K, \qquad r \neq -1, I = (0, +\infty),$
4. $\int x^{-1} \, dx = \log x + K, \qquad I = (0, +\infty),$
5. $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + K, \qquad I = (-\infty, +\infty),$
6. $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + K, \qquad I = (-\infty, +\infty),$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + K = \frac{\pi}{2} - \arccos x + K, \qquad I = (-1, +1),$
8. $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + K, \qquad I = (-\infty, +\infty),$
9. $\int (1 + \tan^2 x) \, dx = \int \sec^{-2} x \, dx = \tan x + K, \qquad I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),$
10. $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotan} x + K, \qquad I = (0, \pi),$

A continuación se relacionan algunas propiedades útiles para calcular primitivas de otras funciones partiendo de las anteriores.

8.2. Utilizar la regla de la cadena para las primitivas

Proposición. *Sean f y g funciones derivables definidas en el intervalo (a, b). Entonces se verifica la fórmula:*

$$\int f'(g(x))g'(x) \, dx = f \circ g(x) + K.$$

Esta proposición permite ampliar la relación de primitivas dadas anteriormente. En efecto, para cualquier función derivable f se tienen las siguientes primitivas:

1. $\int a^{f(x)} f'(x) \, dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + K, \qquad a > 0, a \neq 1,$
2. $\int e^{f(x)} f'(x) \, dx = e^{f(x)} + K,$
3. $\int f(x)^r f'(x) \, dx = \frac{f(x)^{r+1}}{r+1} + K, \qquad r \neq -1,$
4. $\int f(x)^{-1} f'(x) \, dx = \log f(x) + K,$
5. $\int \operatorname{sen} f(x) f'(x) \, dx = -\cos f(x) + K,$
6. $\int \cos f(x) f'(x) \, dx = \operatorname{sen} f(x) + K,$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} f'(x) \, dx = \operatorname{arcsen} f(x) + K = \frac{\pi}{2} - \arccos f(x) + K,$
8. $\int \frac{1}{1+f(x)^2} f'(x) \, dx = \arctan f(x) + K,$
9. $\int (1 + \tan^2 f(x)) f'(x) \, dx = \int \sec^{-2} f(x) \, dx = \tan f(x) + K,$

10. $\int f'(x) \operatorname{cosec}^2 f(x) \, dx = -\operatorname{cotan} f(x) + K,$

Ejemplo. *La integral de la función tangente se encuentra en la situación de la proposición anterior. En efecto:*

$$\int \tan x \, dx = -\log |\cos x| \text{ en todo intervalo tal que } \cos x \neq 0.$$

8.3. Integración de sumas y por partes

Proposición. *Dadas funciones $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ y un número real λ, se verifica:*

- $\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx,$
- $\int \lambda f(x) \, dx = \lambda \int f(x) \, dx.$

Ejemplo (Integración de polinomios).

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_p x^p) \, dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots a_p \frac{x^{p+1}}{p+1} + K.$$

Proposición (Regla de derivación por partes). *Dadas funciones $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables, se verifica:*

$$\int f(x) g'(x) \, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) \, dx.$$

Ejemplo.

$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \operatorname{sen} x(-\cos x)' \, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int (\operatorname{sen} x)' \cos x \, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x \, dx$,

de donde:

$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, dx$.

Por lo tanto:

$2 \int \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x$ *y*

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} + \frac{x}{2}.}$$

Ejercicio.

Obtener una fórmula de recurrencia para calcular la primitiva $\int \frac{1}{(1+x^2)^r} \, dx$.

Ejemplo. *Calcula la primitiva* $I = \int e^{-3x} \operatorname{sen}(2x) dx$.

Procedemos por el método de integración por partes haciendo $u = e^{-3x}$ *y* $dv = \operatorname{sen}(2x) dx$, *así que* $du = -3e^{-3x} dx$ *y* $v = -\frac{1}{2}\cos(2x)$.

$$I = -\frac{1}{2} e^{-3x} \cos(2x) - 3\frac{1}{2} \int \cos(2x) e^{-3x} dx.$$

Volvemos a hacer partes poniendo ahora $u_1 = e^{-3x}$ *y* $dv_1 = \cos(2x) dx$, *así que* $du_1 = -3e^{-3x} dx$ *y* $v_1 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$. *Por lo tanto:*

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{2} e^{-3x} \cos(2x) - 3\frac{1}{2} \int \cos(2x) e^{-3x} dx \\
&= -\frac{1}{2} e^{-3x} \cos(2x) - \frac{3}{2} \left(e^{-3x} \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) + 3\frac{1}{2} \int e^{-3x} \operatorname{sen}(2x) dx \right) \\
&\Rightarrow I = -\frac{1}{2} e^{-3x} \cos(2x) - \frac{3}{4} e^{-3x} \operatorname{sen}(2x) - \frac{9}{4} I \\
&\Rightarrow \frac{13}{4} I = -\frac{1}{2} e^{-3x} \cos(2x) - \frac{3}{4} e^{-3x} \operatorname{sen}(2x) \\
&\Rightarrow I = -\frac{2}{13} e^{-3x} \cos(2x) - \frac{3}{13} e^{-3x} \operatorname{sen}(2x).
\end{aligned}$$

Ejemplo. *Calcula la primitiva* $I = \int x \arctan x dx$.

Procedemos por el método de integración por partes haciendo $u = \arctan x$ *y* $dv = x dx$, *así que* $du = \frac{1}{1+x^2} dx$ *y* $v = \frac{x^2}{2}$.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\
&= \frac{x^2 \arctan x}{2} - \frac{1}{2} \int \left(\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\
&= \frac{x^2 \arctan x}{2} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \arctan x + K
\end{aligned}$$

9. Integración por cambio de variable

Supongamos que queremos encontrar la primitiva de una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $\int f(x) \, dx$. En este apartado se trata de ver cómo simplificar dicho cálculo a través de un cambio de variable. Supongamos que $t(x)$ denota una función invertible y derivable y calculemos su derivada $\frac{dt}{dx} = t'(x)$, que *formalmente* podemos escribir como $dt = t'(x) \, dx$.

A través de unos cálculos justificativos que el alumno puede seguir en el Libro de J. A. Fernández Viña (Análisis matemático, tomo 1, página 254) se puede obtener la igualdad:

$$\int f(x) \, dx = \int f(t) \frac{1}{t'(x)} \, dt,$$

donde en el segundo miembro de la igualdad una ver hecha la primitiva hay que substituir t por $t(x)$.

Ejemplo. *Vamos a calcular mediante un cambio de variable la primitiva* $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$*, consideraremos el cambio* $t = \sqrt{x}$*.*

Efectuando el cambio, tendremos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2t}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = 2\arctan t = 2\arctan\sqrt{x}.$$

10. Primitivas de fracciones racionales

El método para calcular primitivas de fracciones racionales se basa en la descomposición de una fracción racional en fracciones simples. Recordemos que una *fracción racional* en la variable x no es más que un cociente de polinomios en la variable x. En cambio, una *fracción racional simple* o una *fracción simple* es una fracción racional de una de las dos formas siguientes:

1. una fracción racional cuyo numerador es una constante y cuyo denominador es un polinomio de grado 1,
2. una fracción racional cuyo numerador es un polinomio de grado 1 y cuyo denominador es un polinomio de grado 2 sin raíces reales.

Teorema. *Toda fracción racional* $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *se descompone como:*

$$F(x) = r(x) + \sum_{k=1}^{\alpha_1} \frac{A_k}{(x-a_1)^k} + \cdots + + \sum_{k=1}^{\alpha_m} \frac{A_k}{(x-a_n)^k},$$

donde los a_i *son las raíces de* $Q(x) = 0$ *y* α_i *son las multiplicidades. Finalmente los* A_i *son números reales determinados y* $r(x)$ *un polinomio.*

Teorema. *Toda fracción racional* $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *se descompone como:*

$$F(x) = r(x) + \sum_{k=1}^{\alpha_1} \frac{A_k^1}{(x-a_1)^k} + \cdots + + \sum_{k=1}^{\alpha_m} \frac{A_k^n}{(x-a_n)^k} + \sum_{k=1}^{\beta_1} \frac{B_k^1 x + C_k^1}{\{[x-(b_1+c_1 i)][x-(b_1-c_1 i)]\}^k} + \cdots + \sum_{k=1}^{\beta_l} \frac{B_k^l x + C_k^l}{\{[x-(b_l+c_l i)][x-(b_l-c_l i)]\}^k},$$

donde los a_i *son las raíces reales de* $Q(x) = 0$ *y* α_i *son las multiplicidades de dichas raíces, los* $b_j + c_j i$ *son las raíces complejas de* $Q(x) = 0$ *y* β_j *son las multiplicidades de dichas raíces. Finalmente los* A_i, B_i *y* C_i *son números reales determinados y* $r(x)$ *un polinomio.*

Apoyándose en el teorema anterior se puede deducir un método para hacer primitivas de fracciones racionales. El método consistirá en obtener la descomposición anterior y calcular primitivas sumando a sumando.

11. Primitivas de expresiones que contienen $\frac{ax+b}{cx+d}$

Sea F una fracción racional del tipo:

$$F\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right),$$

de forma que n es el mínimo común múltiplo de los números $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Entonces el cambio de variable

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d},$$

transforma la primitiva $\int F\,\mathrm{d}x$ en la primitiva de una fracción racional en la variable t.

Ejercicio.

Resolver las primitivas[1]:

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$,
2. $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$,
3. $\int \frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2}\,\mathrm{d}x$.

[1] Indicación: los cambios necesarios serán tomar t igual a $\sqrt[6]{x}$, $\sqrt{1-x}$ y $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

12. Las funciones hiperbólicas

Recordamos que las funciones seno y coseno se introducen utilizando la función exponencial compleja de la forma que sigue:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}.$$

Si en vez de considerar la exponencial compleja consideramos la exponencial real obtendremos las *funciones coseno y seno hiperbólicos* definidas concretamente como siguen:

$$\operatorname{Ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{Sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2},$$

es fácil ver que ambas funciones son continuas y están definidas sobre todo $\mathbb{R}$. Además, la función coseno hiperbólico es siempre mayor que cero ya que la exponencial siempre es mayor que cero. Por lo tanto podemos dividir la función seno hiperbólico por la función coseno hiperbólico y obtenemos la función tangente hiperbólica, continua y definida sobre todo $\mathbb{R}$:

$$\operatorname{Th} x = \frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x}.$$

A partir de estas definiciones se pueden obtener sin dificultad las propiedades básicas de las funciones hiperbólicas, propiedades análogas (que no iguales) a las de las funciones trigonométricas:

Teorema.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ch}(-x) &= \operatorname{Ch} x & \cos(-x) &= \cos x\\
\operatorname{Sh}(-x) &= -\operatorname{Sh} x & \operatorname{sen}(-x) &= -\operatorname{sen} x\\
\operatorname{Th}(-x) &= -\operatorname{Th}(x) & \tan(-x) &= -\tan x\\
\operatorname{Ch}^2 x - \operatorname{Sh}^2 x &= 1 & \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x &= 1\\
1 - \operatorname{Th}^2 x &= \frac{1}{\operatorname{Ch}^2} & 1 + tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x}\\
\operatorname{Ch}(x+y) &= \operatorname{Ch} x \operatorname{Ch} y + \operatorname{Sh} x \operatorname{Sh} y & \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\\
\operatorname{Ch}(2x) &= \operatorname{Ch}^2 x + \operatorname{Sh}^2 x & \cos(2x) &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\\
\operatorname{Ch}(x-y) &= \operatorname{Ch} x \operatorname{Ch} y - \operatorname{Sh} x \operatorname{Sh} y & \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\\
\operatorname{Sh}(x+y) &= \operatorname{Sh} x \operatorname{Ch} y + \operatorname{Ch} x \operatorname{Sh} y & \operatorname{sen}(x+y) &= \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y\\
\operatorname{Sh}(2x) &= 2\operatorname{Sh} x \operatorname{Ch} x & \operatorname{sen}(2x) &= 2\operatorname{sen} x \cos x\\
\operatorname{Sh}(x-y) &= \operatorname{Sh} x \operatorname{Ch} y - \operatorname{Ch} x \operatorname{Sh} y & \operatorname{sen}(x-y) &= \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y\\
\operatorname{Th}(x+y) &= \frac{\operatorname{Th} x + \operatorname{Th} y}{1 + \operatorname{Th} x \operatorname{Th} y} & \tan(x-y) &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}\\
\operatorname{Th}(x-y) &= \frac{\operatorname{Th} x - \operatorname{Th} y}{1 - \operatorname{Th} x \operatorname{Th} y} & \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}
\end{aligned}$$

Además de estas propiedades que dependen únicamente de la definición de las funciones hiperbólicas, por la propia definición estas funciones son derivables, viniendo recogidas sus propiedades en lo que sigue:

$$\operatorname{Sh}' x = \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \operatorname{Ch} x,$$
$$\operatorname{Ch}' x = \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \operatorname{Sh} x,$$
$$\operatorname{Th}' x = \left(\frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{Ch} x \operatorname{Ch} x - \operatorname{Sh} x \operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x}. \tag{1}$$

Resumiendo:

$$\boxed{\operatorname{Sh}' x = \operatorname{Ch} x, \quad \operatorname{Ch}' x = \operatorname{Sh} x, \quad \operatorname{Th}' x = \tfrac{1}{\operatorname{Ch}^2 x}.}$$

Ahora que conocemos las derivadas de las funciones hiperbólicas se puede ver fácilmente que $\operatorname{Sh}' x$ y $\operatorname{Th}' x$ son números reales estrictamente mayores que cero, luego ambas funciones son estrictamente crecientes y por lo tanto aplicaciones inyectivas. Estudiando los límites cuando x tiende a $\pm\infty$ conoceremos entre qué intervalos ambas funciones son biyectivas.

Observación.

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{Sh} x = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{Sh} x = -\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{Th} x = 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{Th} x = -1.$$

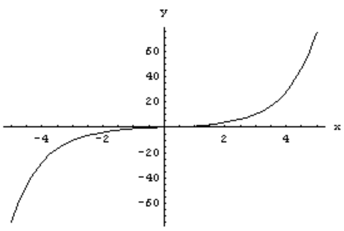


Figura 1: Función seno hiperbólico

Teorema. *Las funciones:*

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Sh} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & \operatorname{Sh} x \end{array} \quad y \quad \begin{array}{rcl} \operatorname{Th} : \mathbb{R} & \longrightarrow & (-1,1) \\ x & \rightarrow & \operatorname{Th} x \end{array}$$

son biyectivas.

Sin embargo, la función coseno hiperbólico no es una aplicación biyectiva cuando la consideramos definida sobre todo $\mathbb{R}$, es más, mediante el uso de las derivadas de la función Ch se puede ver que dicha función tiene un mínimo en $x = 0$.

12.1. Los argumentos hiperbólicos de las funciones hiperbólicas

Hemos visto ya que las funciones seno y tangente hiperbólicas son invertibles, con lo cual nos podemos plantear la búsqueda de sus funciones

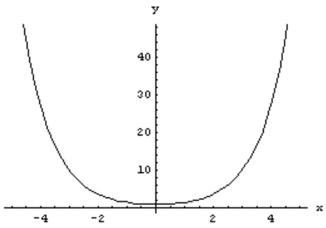


Figura 2: Función coseno hiperbólico

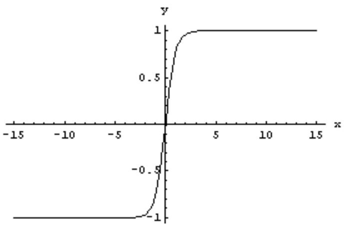


Figura 3: Función tangente hiperbólica

inversas, éstas funciones se llamarán *argumento del seno hiperbólico* y *argumento de la tangente hiperbólica*.

Aunque la función coseno hiperbólico no sea una biyección, si la consideramos definida sólo sobre la semirrecta positiva o negativa, sí que es un biyección y tiene sentido buscar el *argumento del coseno hiperbólico*.

Argumento del seno hiperbólico

Partiendo de la igualdad $y = \operatorname{Sh} x$, encontrar el argumento del seno hiperbólico se trata de despejar x en función de y. Para ello seguimos los siguientes pasos:

$$\operatorname{Sh} x = y \Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Rightarrow e^x - e^{-x} = 2y.$$

Ahora hacemos el cambio de variable $z = e^x$, de donde $\frac{1}{z} = e^{-x}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Sh} x = e^x - e^{-x} = 2y \Rightarrow z - \frac{1}{z} = 2y \Rightarrow z^2 - 2yz - 1 = 0 \qquad (2) \\ \Rightarrow z = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} = y \pm \sqrt{1+y^2}. \end{aligned}$$

Ahora hay que observar que el signo menos anterior no tiene sentido ya que para él, z sería negativo, sin embargo z debe ser positivo por ser igual a e^x. Entonces:

$$\operatorname{ArgSh} y = \log(y + \sqrt{y^2+1}).$$

Argumento del coseno hiperbólico

Partiendo ahora de la igualdad $y = \operatorname{Ch} x$, encontrar el argumento del coseno hiperbólico se trata de despejar x en función de y. Para ello procedemos como antes:

$$\operatorname{Ch} x = y \Rightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \Rightarrow e^x + e^{-x} = 2y.$$

Ahora hacemos el cambio de variable $z = e^x$, de donde $\frac{1}{z} = e^{-x}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ch} x = e^x + e^{-x} = 2y \Rightarrow z + \frac{1}{z} = 2y \Rightarrow z^2 - 2yz + 1 = 0 \qquad (3) \\ \Rightarrow z = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2-4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2-1}. \end{aligned}$$

En este caso el signo menos sí tiene sentido porque no hace que z sea negativo. Entonces:

$$\operatorname{ArgCh} y = \log(y \pm \sqrt{y^2-1}).$$

Argumento de la tangente hiperbólica

Observemos para empezar que la tangente hiperbólica sólo estará definida en el intervalo $(-1, 1)$, ya que la tangente hiperbólica sólo toma valores en dicho intervalo. Partimos de la igualdad $y = \operatorname{Th} x$ y hacemos en los cálculo que siguen el cambio de variable $z = e^x$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Th} x = y \Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \Rightarrow z - \frac{1}{z} = (z + \frac{1}{z})y \Rightarrow \frac{z^2-1}{z} = \frac{z^2+1}{z}y \\ \Rightarrow (y-1)z^2 = -1 - y \Rightarrow z^2 = \frac{1+y}{1-y} \Rightarrow x = \log\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{ArgTh} y = \log\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.$$

12.2. Las derivadas de las funciones hiperbólicas y sus análogas trigonométricas

$$\begin{aligned} \operatorname{Sh}' x &= \operatorname{Ch} x, & \operatorname{sen}' x &= \cos x \\ \operatorname{Ch}' x &= \operatorname{Sh} x, & \cos' x &= -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{Th}' x &= \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x}, & \tan' x &= \frac{1}{\cos^2} \\ \operatorname{ArgSh}' x &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \operatorname{arcsen}' x &= \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}} \\ \operatorname{ArgCh}' x &= \frac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}}, & \operatorname{arc}\cos' x &= \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}} \\ \operatorname{ArgTh}' x &= \frac{1}{1-x^2}, & \arctan' x &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned} \qquad (4)$$

13. Primitivas de expresiones que contienen $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$

En esta sección vamos a analizar cómo obtener primitivas del estilo $\int f(\cos x, \operatorname{sen} x)\ \mathrm{d}x$, donde f es una fracción racional y el intervalo donde queremos calcular la primitiva será $(-\pi, \pi)$.

13.1. El cambio de variable $x = 2\arctan t$

El cambio de variable $x = 2\arctan t$, es decir, $t = \tan\frac{x}{2}$, pone en correspondencia el intervalo $(-\pi, \pi)$ con toda la recta real. Al realizar este cambio será de utilidad tener en cuenta las relaciones trigonométricas usuales que dan las siguientes igualdades:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}. \tag{5}$$

Al realizar este cambio de variable y tener en cuenta las relaciones anteriores convertiremos la primitiva inicial en la de una fracción racional en la variable t:

$$\int f(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Aunque este cambio nos asegura el éxito en la resolución de primitivas, otros pueden conllevar una resolución más simple. Veámoslo.

13.2. El cambio $t = \operatorname{sen} x$

Si la fracción racional $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es del estilo $f_1(\operatorname{sen} x)\cos x$ entonces el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$ nos lleva a una resolución más sencilla. Conviene notar que estaremos ante este caso cuando al dividir

$f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ por $\cos x$ nos quedan sólo potencias pares de $\cos x$, pues basta poner $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$.

13.3. El cambio $t = \cos x$

Si la fracción racional $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es del estilo $f_1(\cos x)\operatorname{sen} x$ entonces el cambio de variable $t = \cos x$ nos lleva a una resolución más sencilla que utilizando el primer cambio de la tangente del ángulo mitad. Conviene notar que estaremos ante este caso cuando al dividir $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ por $\operatorname{sen} x$ nos quedan sólo potencias pares de $\operatorname{sen} x$, pues basta poner $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.

13.4. El cambio $t = \tan x$

En el caso en el que la fracción racional $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ sea del estilo $f_1(\tan x)$ entonces se hace el cambio $\tan x = t$ y la primitiva $\int f_1(\tan x)\,\mathrm{d}x$ queda como

$$\int \frac{f_1(\tan x)}{1+\tan^2 x}(1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{f_1(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Estaremos en este caso si al sustituir $\operatorname{sen} x$ por $\cos x \tan x$ en la expresión $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ nos quedan sólo cosenos elevados a exponentes pares, pues basta poner entonces $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$.

13.5. Casos particulares

Un caso interesante de las primitivas de funciones trigonométricas son las de la forma

$$\int \cos^n x \operatorname{sen}^m x\,\mathrm{d}x,$$

donde los exponentes m y n son naturales. Utilizando las fórmulas de trigonometría puede expresarse $\cos^n x$ como una suma en la que intervienen cosenos múltiplos de x, y $\operatorname{sen}^m x$ como una suma en la que intervienen cosenos y senos múltiplos de x. Al efectuar la multiplicación de dichas sumas aparecerán productos de la forma $\operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta x)$ y productos de la forma $\cos(\alpha x)\operatorname{sen}(\beta x)$. Para calcular las integrales de estos productos se descomponen en sumas utilizando las fórmulas:

$$2\operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta x) = \operatorname{sen}[(\alpha+\beta)x] + \operatorname{sen}[(\alpha-\beta)x] \tag{6}$$

$$2\cos(\alpha x)\cos(\beta x) = \cos[(\alpha+\beta)x] + \cos[(\alpha-\beta)x] \tag{7}$$

Por otro lado, otra situación interesante es aquella en la que disponemos de una fracción racional en las variables $\cos(r_1 x), \cos(r_2 x), \ldots, \cos(r_n x)$, $\operatorname{sen}(s_1 x), \operatorname{sen}(s_2 x), \ldots, \operatorname{sen}(s_m x)$, siendo los números $r_1, r_2, \ldots, r_n$, $s_1, s_2, \ldots, s_m$ son racionales. Tomemos el mínimo común múltiplo de los denominadores de dichos números, p, y hagamos el cambio $x = pt$. Con lo que obtendremos una primitiva donde intervienen cosenos y

senos múltiplos enteros de t. Finalmente, cada una de las funciones anteriores se puede expresar como un polinomio de $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$, con lo que hemos pasado al primer caso de este apartado.

Ejercicio.

Resuelve:

1. $\int \frac{1}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x$ usando el cambio $\tan(x/2) = t$,
2. $\int \frac{1+\cos^2 x}{cosx(1+\operatorname{sen}^2 x)}\,\mathrm{d}x$ usando el cambio $\operatorname{sen} x = t$,
3. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ usando el cambio $\tan x = t$.

14. Primitivas de expresiones que contienen $\sqrt{ax^2+2bx+c}$

En esta sección se estudian las primitivas del estilo $\int f(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})\,\mathrm{d}x$, donde f es una fracción racional y a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

En estas primitivas siempre hay que tener en cuenta la identidad:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a},$$

lo cual sugiere hacer el cambio de variable $t = x + b/a$ transformándose la primitiva de partida en:

$$\int f(t - b/a, \sqrt{at^2 + d})\,\mathrm{d}t.$$

En el caso que d sea cero, a debe ser positivo y la primitiva toma la forma $\int f(t-b/a, \sqrt{a}t)\,\mathrm{d}t$, que no plantea dificultades. Por lo tanto consideraremos que estamos en el caso $d \neq 0$ y veremos la forma de proceder distinguiendo tres casos.

1. $d < 0$ y $a > 0$. En este caso hacemos el cambio de variable $\sqrt{\frac{a}{-d}}t = u$ y obtenemos la nueva primitiva
$$\int f(\sqrt{\frac{-d}{a}}u - \frac{b}{a}, \sqrt{-d}\sqrt{u^2-1})\,\mathrm{d}u = \int f_1(u, \sqrt{u^2-1})\,\mathrm{d}u,$$
donde f_1 es una fracción racional. Esta última integral se resuelve fácilmente haciendo el cambio $u = \mathrm{Ch}\, v$.

2. $d > 0$ y $a > 0$. En este caso hacemos el cambio de variable $\sqrt{\frac{-a}{d}}t = u$ y obtenemos la nueva primitiva
$$\int f(\sqrt{\frac{d}{-a}}u - \frac{b}{a}, \sqrt{d}\sqrt{1-u^2})\,\mathrm{d}u = \int f_2(u, \sqrt{1-u^2})\,\mathrm{d}u,$$
donde f_2 es una fracción racional. Esta última integral se resuelve fácilmente haciendo el cambio $u = \mathrm{sen}\, v$.

3. $d > 0$ y $a > 0$. En este último caso se hace el cambio $\sqrt{\frac{a}{d}}t = u$ y obtenemos la nueva primitiva
$$\int f(\sqrt{\frac{d}{a}}u - \frac{b}{a}, \sqrt{d}\sqrt{u^2+1})\,\mathrm{d}u = \int f_1(u, \sqrt{u^2+1})\,\mathrm{d}u,$$
donde f_1 es una fracción racional. Esta última integral se resuelve fácilmente haciendo el cambio $u = \mathrm{Sh}\, v$.

Tema 2: Matrices y determinantes

Gabriel Soler López

26 de septiembre de 2006

1. Definición de matriz. Tipos de matrices

Definición (Matriz).

Una *matriz* de tamaño $m \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ es una colección de $m\,n$ elementos de $\mathbb{K}$ ordenados en una tabla de m filas y n columnas de la forma:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$
con $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ para todo $(i,j) \in \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\}$.

Notación.

- Al conjunto de todas las matrices de tamaño $m \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ se le denota por $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

- Denotaremos a las matrices con letras mayúsculas A, B, C, $\ldots$.
- Los elementos de las matrices se denotarán con minúsculas a, b, c, $\ldots$.
- Si denotamos a una matriz por la letra A, entonces el elemento de dicha matriz que está en la fila i y columna j se le denota genéricamente por $a_{i,j}$, así que $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}}$.

Tipos de matrices y más notación.

1. $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}}$ es *cuadrada* si el número de sus filas es igual al de columnas, es decir, si $m = n$.
2. $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}}$ es una *matriz fila* si $m = 1$.
3. $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}}$ es una *matriz columna* si $n = 1$.
4. Los elementos de la *diagonal* de A son $\{a_{ii}\}_{i\in\{1,\ldots,\text{mín}(m,n)\}}$.
5. S i A tiene todos los elementos por encima (respectivamente por debajo) de la diagonal igual a 0 se dice que A es *triangular inferior* (resp. *triangular superior*), es decir, si $a_{i,j} = 0$ para todo $j > i$ (resp. $a_{i,j} = 0$ para todo $j < i$).
6. Una matriz es *diagonal* si y sólo si $a_{i,j} = 0$ para todo $i \neq j$.
7. Dos matrices A y B son *iguales* si y sólo si tienen el mismo tamaño, por ejemplo $m \times n$, y además para todo $(i,j) \in \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots n\}$ se tiene que $a_{i,j} = b_{i,j}$.

Solución: en un primer paso calculamos $\exp(Bx)$ con

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $p_B(x) = (x-1-i)(x-1+i)$, $\sigma_B = \{\lambda_1 = 1+i, \lambda_2 = 1-i\}$, $a_1(x) = +\frac{1}{2i}$ y $a_2(x) = -\frac{1}{2i}$, se tiene

$$e^{Bx} = e^{(1+i)x}\frac{1}{2i}I_2[A-(1-i)I_2] - e^{(1-i)x}\frac{1}{2i}I_2[A-(1+i)I_2] =$$

$$e^x \begin{pmatrix} 2\operatorname{sen} x + \cos x & -2\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & -2\operatorname{sen} x + \cos x \end{pmatrix}.$$

Así que cualquier solución del sistema será del tipo

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} 2\operatorname{sen} x + \cos x & -2\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & -2\operatorname{sen} x + \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

□

Acabamos esta sección resolviendo un sistema no homogéneo por el método de variación de las constantes, tal y como explicamos en la página **??**.

Ejemplo. *Resolver el sistema:*

$$\begin{cases} x' = 4x + 2y + e^t, \\ y' = 3x + 3y, \end{cases}$$

Solucion: para esta ecuación ya hemos encontrado la solución del sistema lineal homogéneo. Así que debemos encontrar una solución particular del sistema no homogéneo con el método de variación de las constantes. Calculamos pues.

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\int \begin{pmatrix} 3e^{-6x} + 2e^{-x} & 2e^{-6x} - 2e^{-x} \\ 3e^{-6x} - 3e^{-x} & 2e^{-6x} + 3e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} dx$$

$$= \frac{1}{5}\int \begin{pmatrix} 3e^{-5x} + 2 \\ 3e^{-5x} - 3 \end{pmatrix} dx = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \frac{-3e^{-5x}}{5} + 2x + c_1 \\ \frac{-3e^{-5x}}{5} - 3x + c_2 \end{pmatrix} dx,$$

así que una solución particular del sistema será

$$\mathbf{y}_p(x) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{6x} + 2e^x & 32e^{6x} - 2e^x \\ 3e^{6x} - 3e^x & 2e^{6x} + 3e^x \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \frac{-3e^{-5x}}{5} + 2x \\ \frac{-3e^{-5x}}{5} - 3x \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}e^x \begin{pmatrix} 10x - 3 \\ 3 - 15x \end{pmatrix}.$$

Y la solución general del sistema será:

$$\mathbf{y}_g(x) = \begin{pmatrix} 3e^{6x} + 2e^x & 32e^{6x} - 2e^x \\ 3e^{6x} - 3e^x & 2e^{6x} + 3e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{25}e^x \begin{pmatrix} 10x - 3 \\ 3 - 15x \end{pmatrix}.$$

□

El cálculo hecho de la exponencial de una matriz en esta sección nos va a dar la estructura de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. En particular, la interpretación de la ecuación 12 permite probar la proposición que sigue.

Proposición. *Sean $A \in M_m(\mathbb{R})$ e $\mathbf{y}(t)$ una solución de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Entonces cada una de las coordenadas de $\mathbf{y}(t)$ es una combinación lineal de las funciones*

$$t^k e^{ta} \cos tb,\ t^k e^{ta} \operatorname{sen} tb,$$

donde $a + bi$ recorre el conjunto de los valores propios de A con $b \geq 0$ y $0 \leq k < m(a+bi)$.

Temas 1, 2 y 3 del Bloque II. Repaso del cálculo diferencial de una variable

Gabriel Soler López

11 enero de 2004

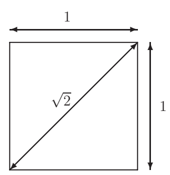
1. Introducción a los números reales

En este tema se estudia la continuidad y la diferenciabilidad de funciones reales de variable real. Conviene por lo tanto, repasar las propiedades del conjunto de los números reales. Ya sabemos que el conjunto de los números reales es un cuerpo, pero además satisface otras propiedades que se utilizan en el desarrollo del cálculo diferencial.

1.1. Los números reales son un cuerpo que completa a los números racionales $\mathbb{Q}$

El siguiente ejemplo sencillo muestra la necesidad de completar los números racionales.

Ejemplo. *La longitud de la diagonal del cuadrado que sigue no se puede medir con un número racional.*



¿Sabéis demostrar que $\sqrt{2}$ no es racional?

Si $\sqrt{2}$ fuera racional existirían números enteros a y b tales que:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b},$$

además se pueden elegir a y b primos entre sí, es decir, se pueden elegir de manera que la fracción está simplificada.

Elevando al cuadrado la expresión anterior se tiene:

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2$$

Así que el número a^2 es par y a también debe ser par, es decir $a = 2m$ para cierto número entero m. Por lo tanto:

$$2b^2 = 4m^2 \Rightarrow b^2 = 2m^2.$$

De lo anterior se tiene que b^2 es par y por lo tanto b también es par. Pero esto es una contradicción con el hecho de que a y b sean primos entre si.

2. Propiedades del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$

2.1. Propiedades algebraicas

Los números reales son un cuerpo, es decir, satisfacen los siguientes axiomas para cualesquiera números reales x, y y z:

Axioma 1. La suma es conmutativa: $x + y = y + x$.

Axioma 2. La suma es asociativa: $x + (y + z) = (x + y) + z$.

Axioma 3. El número real 0 verifica $x + 0 = x$ (0 es el elemento neutro de la suma).

Axioma 4. Existe un número denotado por $-x$ tal que $x+(-x) = 0$.

Axioma 5. El producto es conmutativo: $x + y = y + x$.

Axioma 6. El producto es asociativo: $x + (y + z) = (x + y) + z$.

Axioma 7. El número real 1 verifica $x \cdot 1 = x$ (1 es el elemento neutro del producto).

Axioma 8. Existe un número denotado por x^{-1} tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Axioma 9. Se verifica la propiedad distributiva del producto respecto a la suma: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Ejercicio.

Usando los axiomas demostrar:

1. Si dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ verifican que $x + y = y$, entonces $x = 0$.
2. Si dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ verifican que $x \cdot y = y$, entonces $x = 1$.
3. Si $x + y = 0$ entonces $y = -x$.
4. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, la solución de la ecuación $a+x = b$ es $x = (-a)+b$

2.2. El orden en $\mathbb{R}$

Definición (Relación de orden). Definimos en el conjunto de los números reales la relación $\leq$ de la siguiente forma:

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \text{ tal que } a + x = b$$

Proposición. *La relación de orden anterior verifica las siguientes propiedades:*

Reflexiva: *para todo número real x se verifica $x \leq x$.*

Antisimétrica: *para cualesquiera números reales a, b si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.*

Transitiva: *para cualesquiera números reales a, b, c, si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.*

Orden total: *para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ siempre se tiene que o bien $a \leq b$ o bien $b \leq a$.*

Proposición (El orden y la aritmética). *Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se tiene:*

1. *Si $a \leq b$ entonces $a + c \leq b + c$.*
2. *Si $a \leq b$ y $c > 0$ entonces $ac \leq bc$.*
3. *Si $a \leq b$ y $c < 0$ entonces $ac \geq bc$.*

4. *Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$.*

2.3. Densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{I} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

Teorema. *Si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.*

Teorema. *Si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, existe $i \in \mathbb{I}$ tal que $x < i < y$.*

2.4. Principio del encaje Cantor

Dada una sucesión de intervalos $[a_n, b_n]$ tales que:

1. $a_n \leq a_{n+1}$,
2. $b_n \geq b_{n+1}$,
3. $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$,

entonces existe un único número real r tal que

$$\{r\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$$

Observación. *Este principio tiene gran importancia para probar, por ejemplo, el teorema de Bolzano.*

3. Axioma del supremo

Definición. Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, se dice que el número $a \in \mathbb{R}$ es una *cota superior del conjunto A* si se verifica que $x \leq a$ para todo $x \in A$.

Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, se dice que el número $b \in \mathbb{R}$ es una *cota inferior del conjunto A* si se verifica que $x \geq b$ para todo $x \in A$.

Si un conjunto tiene una cota superior se dice que está *acotado superiormente*.

Si un conjunto tiene una cota inferior se dice que está *acotado inferiormente*.

Si un conjunto está acotado superior e inferiormente se dice que está *acotado*.

La menor de las cotas superiores de un conjunto se llama *supremo* del conjunto.

La mayor de las cotas inferiores de un conjunto se llama *ínfimo* del conjunto.

Si el supremo de un conjunto está dentro del conjunto entonces se llama también *máximo* del conjunto.

Si el ínfimo de un conjunto está dentro del conjunto entonces se llama también *mínimo* del conjunto.

Ejemplo. *Para el conjunto* $(1, 7]$ *tenemos:*

- *8 10 y 7 son cotas superiores del conjunto.*
- *7 es el supremo y también el máximo del conjunto.*
- *1 es el ínfimo del conjunto pero no existe el mínimo.*

Completitud de $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ es un cuerpo completo, es decir, cualquier conjunto acotado superiormente tiene un supremo.

Observación. *El conjunto $\mathbb{Q}$ no es completo porque si tomamos el conjunto*

$$A = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq \sqrt{2}\}$$

se tiene que está acotado superiormente por ejemplo por 2, pero no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.

3.1. Límites de funciones

Definición (Límite lateral por la derecha). Se dice que el límite de la función $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por la derecha en el punto x_0 es l y se denota por $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ entonces $|f(x) - l| < \epsilon$.

Definición (Límite lateral por la izquierda). Se dice que el límite de la función $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por la izquierda en el punto x_0 es l y se denota por $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ entonces $|f(x) - l| < \epsilon$.

Definición (Límite). Se dice que el límite de la función $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en el punto x_0 es l y se denota por $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ entonces $|f(x) - l| < \epsilon$.

Proposición. *Dada una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ son equivalentes los dos apartados siguientes:*

1. *Existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ y es igual a l,*
2. *existen los límites $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ y son iguales a l.*

Ejemplo. *Dada la función*

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & si\ x \geq 1 \\ x + 2 & si\ x \leq 1, \end{cases}$$

se tiene:

1. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$, *ya que para todo $\epsilon > 0$ tomando $\delta = \epsilon$ se tiene que si $x \in (1, 1+\delta)$ entonces $|f(x)-2| = |x+1-2| = |x-1| = x - 1 < 1 + \delta - 1 = \delta = \epsilon$.*

2. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$, *ya que para todo $\epsilon > 0$ tomando $\delta = \min\{\epsilon, \frac{1}{2}\}$ se tiene que si $x \in (1 - \delta, 1)$ entonces*

$$|f(x) - 3| = |x + 2 - 3| = |x - 1| = 1 - x \tag{16}$$

y como $1 - \delta < x < 1$ entonces $-1 < -x < \delta - 1$ y sumando 1 en la desigualdad

$$0 < 1 - x < \delta. \tag{17}$$

Ahora usando las ecuaciones 16 y 17 tenemos:

$$|f(x) - 3| < \delta = \min\{\epsilon, \frac{1}{2}\} \leq \epsilon,$$

con lo que queda probado que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$.

3. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ *no existe ya que los límites laterales son diferentes.*

4. Continuidad

Definición (Función continua en un punto). Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in (a, b)$, decimos que f es continua en x_0 si y sólo si:

> para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ entonces $f(x) \in (f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta)$.

Nota: $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ es equivalente a $|x - x_0| < \delta$.

Proposición. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in (a,b)$, entonces son equivalentes:*

1. *La función f es continua en el punto x_0,*
2. *$f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.*

Definición (Función continua). Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, diremos que es continua si es continua en todos sus puntos.

Definición (Función discontinua en un punto). Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, diremos que es discontinua en x_0 si no es continua en el punto x_0.

Definición (Función discontinua). Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, diremos que es discontinua si es discontinua en alguno de sus puntos.

4.1. Tipos de discontinuidad

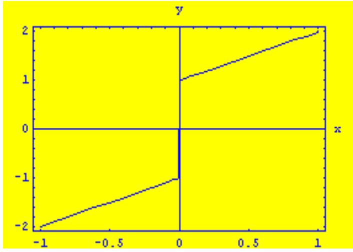
Dada una función $f(a,b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$, distinguiremos tres tipos de discontinuidades.

Discontinuidad evitable. f presenta una discontinuidad evitable en el punto x_0 si:

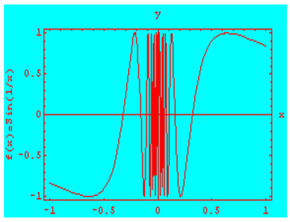
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0).$$

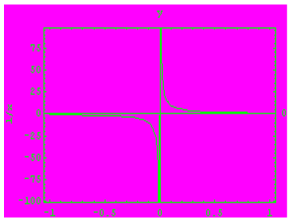
Discontinuidad de primera especie o de salto. f presenta una discontinuidad de salto en el punto x_0 si:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$



Discontinuidad de segunda especie o esencial. f presenta una discontinuidad esencial en el punto x_0 si no existen o son infinitos uno o los dos límites laterales.





4.2. Teoremas relativos a funciones continuas

Teorema (Weierstrass). *Toda función $f(x)$ continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ admite un máximo y un mínimo (absoluto) en $[a,b]$.*

Teorema (Bolzano). *Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y se cumple que $f(a)f(b) < 0$ entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*

5. Derivabilidad de funciones reales de variable real

Definición (Derivada de una función en un punto). Dada una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ se define la derivada de f en el punto c como:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Si una función f es derivable en todos sus puntos entonces diremos que la función es derivable.

Proposición (Propiedades de la derivada). *Dadas funciones*

derivables $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ se tiene:

- $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.
- $(f \cdot g)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$.
- *Si k es una constante $(kf)'(c) = kf'(v)$.*
- *Si $g(c) \neq 0$ entonces $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{f(c)^2}$.*
- *Si $h = f \circ g$ entonces $h'(c) = f'(g(c))g'(c)$.*
- *Si f es inversa de g, es decir, si $f \circ g = g \circ f = Id$ entonces $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$.*

Proposición (Algunas derivadas de funciones concretas). *Si $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es una función derivable entonces:*

♣ $(\operatorname{sen} x)' = \cos(x)$	♣ $(\cos x)' = -\operatorname{sen}(x)$
♣ $(\log x)' = \frac{1}{x}$	♣ $(\tan x)' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
♣ $(a^x)' = a^x \log a$	♣ $(e^x)' = e^x$
♣ $(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	♣ $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
♣ $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	

Teorema (Relación entre derivabilidad y continuidad). *Si la función $f(a,b) \to \mathbb{R}$ es derivable en el punto $c \in (a,b)$ entonces es continua en dicho punto.*

5.1. Teoremas relativos a funciones derivables

Teorema (Rolle). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f(a) = f(b)$, existe al menos un punto $\alpha \in (a,b)$, tal que $f'(\alpha) = 0$.*

Teorema (Del valor medio de Lagrange). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Entonces existe al menos un punto $\alpha \in (a,b)$, tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\alpha).$$

Teorema (Del valor medio de Cauchy). *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Entonces existe al menos un punto $\alpha \in (a,b)$, tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}.$$

Teorema (Regla de L'Hôpital). *Sean las funciones $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivables en un entorno del punto $c \in (a,b)$ y tales que las derivadas no se anulan simultáneamente en ningún punto de dicho entorno, salvo en c. Si ambas tienden simultánemente a 0 (o a infinito) cuando x tiende a c, se verifica:*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

5.2. Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos

Teorema (Crecimiento y decrecimiento). *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función derivable. La función f es creciente en (a,b) si y sólo si $f'(x) \geq 0$.*

La función $f(x)$ es decreciente en (a,b) si y sólo si $f'(x) \leq 0$.

Teorema (Crecimiento y decrecimiento estricto). *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función derivable. Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ entonces f es estrictamente creciente en (a,b).*

Si $f'(x) < 0$. para todo $x \in (a,b)$ entonces f es estrictamente decreciente en (a,b).

Teorema (Extremos). *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función derivable n veces en el punto $c \in (a,b)$ y tal que*

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0; \quad f^{(n)}(c) \neq 0.$$

Entonces, si n es par y $f^{(n)}(c) < 0$, la función presenta un máximo relativo en c. Si n es par y $f^{(n)}(c) > 0$, la función presenta un mínimo relativo en c.

5.3. Concavidad, covexidad y puntos de inflexión

Definición (Convexidad). Se dice que la función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es convexa en el intervalo (a,b) si para cualesquiera x_1 y x_2 de (a,b), se tiene que el segmento rectilíneo que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ queda por encima de la gráfica de f.

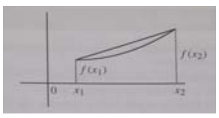


Figura 4: Ejemplo de función convexa

Definición (Concavidad). Se dice que la función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es cóncava en el intervalo (a,b) si para cualesquiera x_1 y x_2 de (a,b), se tiene que el segmento rectilíneo que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ queda por debajo de la gráfica de f.

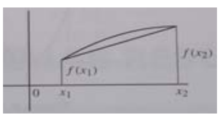


Figura 5: Ejemplo de función cóncava

Teorema. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable. Entonces:*

1. *Si $f''(x) > 0$ en (a,b) entonces f es convexa en (a,b).*
2. *Si $f''(x) < 0$ en (a,b) entonces f es cóncava en (a,b).*

Definición (Punto de inflexión). Una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ se dice que presenta un punto de inflexión en $c \in (a,b)$ si en dicho punto pasa de convexa a cóncava o viceversa.

Teorema. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función que tiene un punto de inflexión en c, entonces $f''(c) = 0$.*

Esta condición es necesaria pero no suficiente.

Teorema. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función derivable n veces en $c \in (a,b)$ y tal que:*

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0 \text{ y } f^{(n)}(c) \neq 0.$$

Entonces, si n es impar la función f presenta un punto de inflexión en la abscisa c.

5.4. Representaciones gráficas de funciones

El estudio y la representación gráfica de una función $y = f(x)$ se suele realizar siguiendo el siguiente orden para determinar:

1. Dominio de la función.
2. Puntos de corte con los ejes de coordenadas.
3. Simetrías respecto del eje $0Y$ (aquellas funciones que verifican $f(x) = f(-x)$ para todo x, se llaman funciones pares) y respecto del eje $0X$ (aquellas funciones que verifican $f(x) = -f(-x)$ para todo x, se llaman funciones impares).
4. Zonas de crecimiento y decrecimiento.
5. Máximos y mínimos.
6. Zonas de concavidad y convexidad.
7. Puntos de inflexión.
8. Asíntotas.

6. Aproximación local de una función

6.1. Introducción

Dado un polinomio de grado n, $P_n(x)$, es posible desarrollarlo en potencias de $x - a$ y escribirlo de la forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n$$

Si derivamos sucesivamente el polinomio obtenemos:

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 \cdots + na_n(x-a)^{n-1}$$

$$P_n''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2(x-a) + 4\cdot 3(x-a)^2 + \ldots n\cdot(n-1)a_n(x-a)^{n-2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_n^{(n)}(x) = n!a_n$$

Si tomamos $x = a$ en las expresiones anteriores se obtienen las siguientes igualdades:

$$P_n(a) = a_0, \qquad P_n'(a) = a_1, \qquad P_n''(a) = 2a_2, \qquad P_n'''(a) = 3{\cdot}2a_3, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, P_n^{(n)}(a) = n!a_n$$

Despejando los valores de a_i y sustituyendo en $P_n(x)$ tenemos:

$$\boxed{P_n(x) = P_n(a) + \frac{P_n'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P_n''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

6.2. Desarrollo de Taylor de una función

Pregunta. Si tenemos una función real de variable real f que admite derivadas hasta el orden $n+1$ en el punto $x = a$ ¿Es posible dar una expresión similar a la anterior para ella?

Respuesta. La igualdad

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

no es cierta porque si lo fuera, f sería un polinomio y no tiene por qué serlo.

Aunque la igualdad anterior no sea cierta sí es posible saber cuál es la diferencia entre el miembro de la izquierda y el de la derecha. Esto es importante porque si dicha diferencia es pequeña podremos utilizar un polinomio para aproximar la función f.

Fijamos en lo que sigue una función f real y de variable real, $n+1$ veces derivable en el punto $x = a$.

Definición (Polinomio de Taylor y Mac-Laurin). El polinomio $P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ recibe el nombre de Polinomio de Taylor (o desarrollo de Taylor) de orden n de la función f en el punto a.

Si $a = 0$ entonces este polinomio también se llama Polinomio de Mac-Laurin (o desarrollo de Mac-Laurin) de orden n de la función f.

Definición (Resto de orden n). El resto de orden n de la función f en el punto a es:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \text{con } \xi \in (a, x).$$

Teorema (Taylor). *Se verifica la igualdad:*

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)}$$

Definición (Función $o((x-a)^n)$). Una función real de variable real g se dice que es una $o((x-a)^n)$ (o pequeña de $(x-a)$ de orden n) si verifica:

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{(x-a)^n} = 0}$$

Teorema. $R_{n+1}(x)$ *es una* $o((x-a)^n)$*, es decir:*

$$\lim_{x\to a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Ejercicio. Calcula el desarrollo de Mac-Laurin de orden n de las funciones e^x, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

4. Volvemos al primer paso y repetimos la operación hasta que $r = m_n$ (puede que no se consiga).

Si no conseguimos la raíz en un número finito de pasos, al menos tendremos una sucesión de intervalos encajados en la que se encuentra la raíz:

$$r \in \cdots \subset [a_n, b_n] \subset \cdots \subset [a_1, b_1] \subset [a, b],$$

además:

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Teorema. (a_n) *es una sucesión creciente y* (b_n) *es una sucesión decreciente, ambas acotada, y por lo tanto convergentes.*

Así que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \le b$$

y

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \ge a,$$

además:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta.$$

Además este límite es la raíz de la ecuación porque:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) f(b_n) = f(\alpha)^2 \le 0 \Rightarrow f(\alpha) = 0.$$

7. Resolución de ecuaciones por el método de bipartición

Dada una ecuación $f(x) = 0$ con f continua en $[a, b]$ y tal que $f(a)f(b) < 0$ y con una raíz única r en $[a, b]$, el método de bipartición consiste en realizar los siguientes pasos:

1. Calcular el punto medio entre a y b, es decir $m_0 = \frac{a+b}{2}$,
2. Si $f(m) = 0$ entonces $r = m_0$,
3. En caso contrario tomamos el intervalo $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ entre $[a, m_0]$ o $[m_0, b]$. Elegimos aquél en el que la función toma en los extremos puntos opuestos, es decir, $r \in [a_1, b_1]$.

7.1. Cota del error absoluto en la n-sima aproximación

Si tomamos como valor aproximado de r a a_n, tenemos:

$$0 \le r - a_n \le \frac{b-a}{2^n}.$$

Si tomamos como valor aproximado de r a b_n, tenemos:

$$0 \le b_n - r \le \frac{b-a}{2^n}.$$

7.2. Ejemplo

La ecuación $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tiene una raíz en $[1, 2]$, ya que $f(1) = -5$ y $f(2) = 14$, si aplicamos el algoritmo de bisección obtenemos los valores de la tabla que sigue:

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$
1	1.0	2.0	1.5	2.375
2	1.0	1.5	1.25	−1.79687
3	1.25	1.5	1.375	0.16211
4	1.25	1.375	1.3125	−0.84839
5	1.3125	1.375	1.34375	−0.35098
6	1.34375	1.375	1.359375	−0.09641
7	1.359375	1.375	1.3671875	0.03236
8	1.359375	1.3671875	1.36328125	−0.03215
9	1.36328125	1.3671875	1.365234375	0.000072
10	1.36328125	1.365234375	1.364257813	−0.01605
11	1.364257813	1.365234375	1.364746094	−0.00799
12	1.364746094	1.365234375	1.364990235	−0.00396
13	1.364990235	1.365234375	1.365112305	−0.00194

Figura 6: Ejemplo del método de bipartición

7.3. Ejemplo

Calcular una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ para la función $f(x) = \cos x - x$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

En este ejemplo tenemos $f(0) = 1 > 0$ y $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$, con lo cual empezamos calculando el punto medio del intervalo de partida, es decir: $m_1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7853981633974483$.

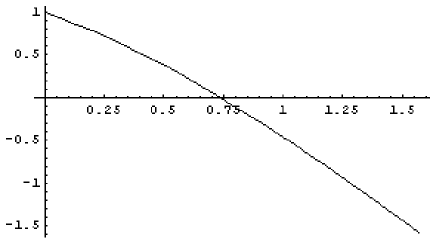


Figura 7: Gráfica de la función $f(x) = \cos x - x$

n	x_n	$f(x_n)$
1	0.7853981633974483	$f(x) = -0{,}0782913822109007$
2	0.39269908169872414	$f(x) = 0{,}5311804508125626$
3	0.5890486225480862	$f(x) = 0{,}24242098975445903$
4	0.6872233929727672	$f(x) = 0{,}08578706038996975$
5	0.7363107781851077	$f(x) = 0{,}0046403471698514$
6	0.760854470791278	$f(x) = -0{,}03660738783981099$
7	0.7485826244881928	$f(x) = -0{,}015928352815779867$
8	0.7424467013366502	$f(x) = -0{,}005630132459280346$
9	0.739378739760879	$f(x) = -0{,}0004914153002637534$
10	0.7378447589729933	$f(x) = 0{,}0020753364865229162$
11	0.7386117493669362	$f(x) = 0{,}0007921780792695676$
12	0.7389952445639076	$f(x) = 0{,}0001504357420498703$
13	0.7391869921623933	$f(x) = -0{,}00017047619334453756$

n	x_n	$f(x_n)$
14	0.7390911183631504	$f(x) = -0{,}000010016828909886755$
15	0.739043181463529	$f(x) = 0{,}00007021030579146277$
16	0.7390671499133397	$f(x) = 0{,}000030096950741631545$
17	0.739079134138245	$f(x) = 0{,}000010040113990528177$
18	0.7390851262506977	$f(x) = 1{,}1655808984656346 \times 10^{-8}$
19	0.7390881223069241	$f(x) = -5{,}0025832334377185 \times 10^{-6}$
20	0.7390866242788109	$f(x) = -2{,}4954628828899317 \times 10^{-6}$
21	0.7390858752647542	$f(x) = -1{,}2419033295074655 \times 10^{-6}$
22	0.7390855007577259	$f(x) = -6{,}151237084139893 \times 10^{-7}$
23	0.7390853135042118	$f(x) = -3{,}017339367250571 \times 10^{-7}$
24	0.7390852198774547	$f(x) = -1{,}450390605395313 \times 10^{-7}$
25	0.7390851730640762	$f(x) = -6{,}669162500028136 \times 10^{-8}$
26	0.7390851496573869	$f(x) = -2{,}7517907730256752 \times 10^{-8}$
27	0.7390851379540423	$f(x) = -7{,}931049372800203 \times 10^{-9}$

Vemos por lo tanto que $r^* = 0{,}7390851379540423$ es casi una raíz ya que $f(x) = -7{,}931049372800203 \times 10^{-9}$, además podemos utilizar la fórmula del error dada antes para ver la distancia entre r^* y la raíz exacta r:

$$|r - r^*| \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2^{27}} = \frac{\pi}{2^{28}} \approx 1{,}17033 \times 10^{-8}.$$

8. Métodos iterativos

8.1. Introducción

Fijemos una ecuación $f(x) = 0$ con f una función continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$ y con raíz única en el intervalo $[a, b]$.

La idea de los métodos iterativos es transformar la ecuación $f(x) = 0$ en una equivalente del tipo $g(x) = x$, partir de un punto x_0 y generar la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$ esperando que x_n converja a la raíz buscada.

La forma más fácil de transformar la primera ecuación en la segunda es sumar a la ecuación el valor x. En efecto, sumando x en los dos miembros de $f(x) = 0$ tendríamos:

$$f(x) + x = x,$$

con lo cual las ecuaciones $f(x) = 0$ y $g(x) = f(x) + x = x$ tendrían las mismas soluciones.

8.2. El método de Newton-Raphson

Suponemos aquí que la función f es derivable. La idea de este método es utilizar las tangentes a la curva $y = f(x)$ como aproximación de la curva.

Se trata en este método de iterar la función $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Observación. *Si la sucesión x_n converge hacia s, entonces s es una raíz de la ecuación $f(x) = 0$.*

Ejemplo. *Calcular una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ para la función $f(x) = \cos x - x$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.*

Solución. 1. Puesto que $f(0)f(\frac{\pi}{2}) = (\cos 0 - 0)(\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$ la ecuación que queremos resolver tiene solución en el intervalo indicado en el enunciado.

2. La solución es única ya que $f'(x) = -\operatorname{sen} x - 1 < 0$ en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.

3. Aplicamos el método de Newton para construir la sucesión:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{\operatorname{sen} x_n - 1},$$

es decir, en este caso estamos iterando la función $g(x) = x - \frac{\cos x - x}{\operatorname{sen} x - 1}$

cuya gráfica es:

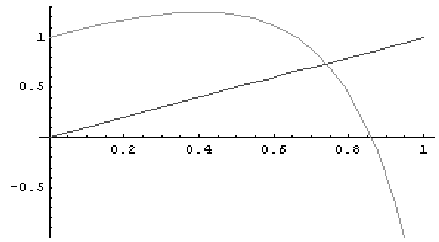


Figura 8: Gráfica de la función $g(x) = x - \frac{\cos x - x}{\operatorname{sen} x - 1}$

Eligiendo $x_0 = \frac{\pi}{4}$ obtenemos:

n	x_n	$f(x_n)$
0	0.7853981635	
1	0.73955361337	-0.000754874682502682
2	0.7390851781	$-7{,}512986643920527 \times 10^{-8}$
3	0.7390851332	$-7{,}771561172376096 \times 10^{-16}$
4	0.7390851332	0

□

8.3. Resultados sobre la convergencia

Teorema (Convergencia global). *Sea f de clase C^2 verificando:*

1. *$f(a)f(b) < 0$,*
2. *Para todo $x \in [a, b]$ se tiene que $f'(x) \neq 0$ (crecimiento o decrecimiento estricto)*
3. *Para todo $x \in [a, b]$, $f''(x) \geq 0$ (alternativamente se puede tener para todo $x \in [a, b]$, $f''(x) \leq 0$)*
4. *$\max\{|\frac{f(a)}{f'(a)}|, |\frac{f(b)}{f'(b)}|\} \leq b - a$*

Entonces existe una única raíz s de $f(x) = 0$ en $[a, b]$ y la sucesión $(x_n)_n$ del método de Newton converge hacia s para todo $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0)f'(x_0) \geq 0$.

8.4. Ejemplo

El método de Newton para la ecuación $\cos x - x = 0$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ converge para cualquier valor $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Así que tenemos $f(x) = \cos x - x$, $f'(x) = -\operatorname{sen} x - 1$ y $f''(x) = -\cos x$.

Ya hemos visto antes que $f(0)f(\frac{\pi}{2}) < 0$, luego se satisface la primera hipótesis del método de Newton.

Además la hipótesis 2 se cumple porque $f'(x) = -\operatorname{sen} x - 1 \neq 0$ y la hipótesis 3 se cumple porque $f''(x) = -\cos x \leq 0$ para todo $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Por último tenemos que

$$|f(0)/f'(0)| = \left|\frac{\cos 0}{-\operatorname{sen} 0 - 1}\right| = 1$$

y que

$$|f(\pi/2)/f'(\pi/2)| = \left|\frac{\cos(\pi/2)}{-\operatorname{sen}(\pi/2) - 1}\right| = \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

con lo que nuestro ejemplo también verifica la hipótesis cuarta y tenemos la convergencia global del método de Newton en nuestro ejemplo en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

9. Ejercicios Resueltos

Ejercicio

Calcula el límite siguiente utilizando desarrollos de Taylor

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3(x^2)}{1 - \cos(x^3)}.$$

Solución. Haremos desarrollos de Taylor del numerador y denominador de orden 6:

- $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$,
- $\operatorname{sen} x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^6)$,

- $\operatorname{sen}^3 x^2 = x^6 + o(x^6)$,
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$,
- $\cos x^3 = 1 - \frac{x^6}{2!} + o(x^6)$,
- $1 - \cos x^3 = \frac{x^6}{2!} + o(x^6)$.

Así que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^6 + o(x^6)}{\frac{x^6}{2!} + o(x^6)} = \frac{1 + \frac{o(x^6)}{x^6}}{\frac{1}{2!} + \frac{o(x^6)}{x^6}} = 2.$$

Ejercicio

Calcula el límite siguiente utilizando desarrollos de Taylor

$$\lim_{x \to 0} \frac{[1 - \cos^2(x^2)]\operatorname{sen}^3(x)}{x \log(1 + x^6)}.$$

Solución. Haremos desarrollos de Taylor del numerador y denominador de orden 7:

- $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$,
- $\operatorname{sen}^2 x = x^2 + \frac{x^6}{36} - 2\frac{x^4}{3!} + 2\frac{x^6}{5!} + o(x^7)$,
- $\operatorname{sen}^3 x = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 x = x^3 - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^7}{5!} + \frac{x^7}{36} + o(x^7)$,
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)$,
- $\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + o(x^7)$,
- $\cos^2 x^2 = 1 - 2\frac{x^4}{2!} + o(x^7)$.
- $1 - \cos^2 x^2 = 2\frac{x^4}{2!} + o(x^7)$.
- $[1 - \cos^2 x^2]\operatorname{sen}^3 x = x^7 + o(x^7)$.
- $\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + o(x^7)$.
- $\log(1 + x^6) = x^6 + o(x^7)$.
- $x \log(1 + x^6) = x^7 + o(x^7)$.

Así que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{[1 - \cos^2(x^2)]\operatorname{sen}^3(x)}{x \log(1 + x^6)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^7 + o(x^7)}{x^7 + o(x^7)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{o(x^7)}{x^7}}{1 + \frac{o(x^7)}{x^7}} = 1$$

Ejercicio

Calcula los límites siguientes:

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{x^5 - x\log(1+x^4)}{\operatorname{sen}^3(x^2)}$ (b) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^3(x^2)}{x^5 - x\log(1+x^4)}$

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{[1-\cos^2(x^2)]\operatorname{sen}^3(x)}{x\log(1+x^6)}$ (d) $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x^3)}{1-\cos^3(x)}$

Solución.

(a) 0, haciendo un desarrollo de orden 6; (b) el límite no existe, aunque sí que existen los límites laterales ($+\infty$ cuando x tiende a 0 por la izquierda y $-\infty$ cuando x tiende a 0 por la derecha). Se necesitan hacer desarrollos de orden 6 y luego investigar el signo de la función que aparece en el denominador $[f(x) = x(x^4 - \log(1 + x^4))]$ cuando x es cercano a 0; (c)

Ejercicio

Calcula el límite siguiente usando desarrollos de Taylor:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\mathrm{sen}\, x^4}{1-\cos(x^2)}$$

Solución. Hacemos desarrollos de Taylor del numerador y denominador de orden 4:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^4+o(x^4)}{1-1+x^4/2+o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{2+\frac{o(x^4)}{x^4}}{\frac{1}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}} = 4.$$

Tema 7: Integración unidimensional

Gabriel Soler López

20 de febrero de 2006

1. Particiones de un intervalo. Suma superior e inferior de Riemann

Definición (Partición del intervalo). Dado un intervalo $[a,b]$, una *partición de* $[a,b]$ es un conjunto finito $\mathcal{P}=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ tal que $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.

A los intervalos $[x_i,x_{i+1}]$, $i=0,1,\ldots n-1$, se les llama *intervalos de la partición* $\mathcal{P}$.

Se define el *diámetro de la partición* $\mathcal{P}$ como el número real positivo $\delta(\mathcal{P})=\max\{|x_{i+1}-x_i|, i=0,1,\ldots,n-1\}$.

Dadas dos particiones $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ de $[a,b]$, diremos que $\mathcal{P}'$ es *más fina* que $\mathcal{P}$ si $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{P}'$. Claramente, en ese caso $\delta(\mathcal{P}')\leq\delta(\mathcal{P})$.

Definición (Sumas inferiores y superiores de Riemann). Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $\mathcal{P}=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Se define la *suma inferior de Riemann* de f para la partición $\mathcal{P}$ como:

$$\boxed{\mathrm{s}(\mathcal{P},f,[a,b])=\sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i)}$$

donde $m_i=\inf\{f(x):x\in[x_i,x_{i+1}]\}$, $0\leq i\leq n-1$.

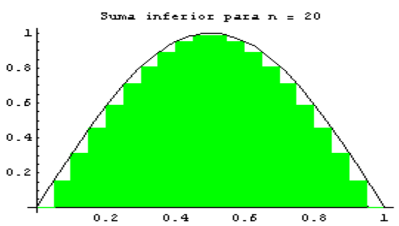


Figura 9: Sumas inferiores de Riemann de la función seno

Se define la *suma superior de Riemann* de f como:

$$\boxed{\mathrm{S}(\mathcal{P},f,[a,b])=\sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i),}$$

donde $M_i=\sup\{f(x):x\in[x_i,x_{i+1}]\}$, $0\leq i\leq n-1$.

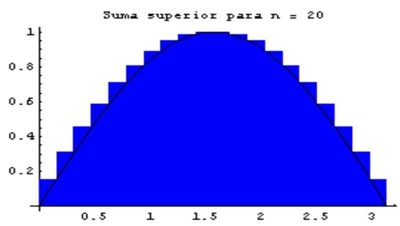


Figura 10: Sumas superiores de Riemann de la función seno

Proposición. *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ son particiones de $[a,b]$ tales que $\mathcal{P}'$ es más fina que $\mathcal{P}$ entonces:*

$$\mathrm{s}(\mathcal{P},f,[a,b])\leq\mathrm{s}(\mathcal{P}',f,[a,b])$$

y

$$\mathrm{S}(\mathcal{P}',f,[a,b])\leq\mathrm{S}(\mathcal{P},f,[a,b]).$$

Ejemplo.

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{sen}: [0,\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \to & \operatorname{sen} x, \end{array}$$

escogiendo la partición $\mathcal{P}_n = \{0, \frac{1}{n}\frac{\pi}{2}, \frac{2}{n}\frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2}, \frac{n}{n}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\}$, *la suma inferior de Riemann es:*

$$s(\mathcal{P}_n, \operatorname{sen}, [0, \frac{\pi}{2}]) = \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{2n}\right)\frac{\pi}{2n},$$

y la superior:

$$S(\mathcal{P}_n, \operatorname{sen}, [0, \frac{\pi}{2}]) = \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{(j+1)\pi}{2n}\right)\frac{\pi}{2n}.$$

También podemos calcular sumas de Riemann sin elegir necesariamente el máximo y el mínimo en cada intervalo, sino un punto arbitrario, éstas tendrán su utilidad a la hora de las clases prácticas.

Definición (Sumas de Riemann). Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$ y $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ un vector tal que $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Se define la *suma de Riemann de f para la partición $\mathcal{P}$ y la elección $\boldsymbol{\xi}$* como:

$$s(\mathcal{P}, f, [a,b], \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

2. Funciones integrables Riemann. Interpretación geométrica

Definición (Función integrable Riemann). Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $(\mathcal{P}_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de particiones de $[a,b]$ tales que:

- $\mathcal{P}_{n+1}$ es más fina que $\mathcal{P}_n$, $n = 1, 2, \ldots, \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \delta(\mathcal{P}_n) = 0$.

Se dice que f es integrable Riemann o integrable en $[a,b]$ si existen y coinciden los límites:

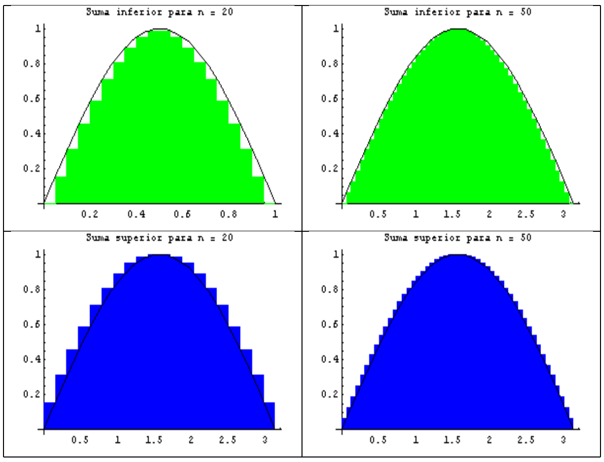
$$\lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}_n, f, [a,b]) = \lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n, f, [a,b])$$

A este valor se le llama *integral de Riemann o integral de f en* $[a,b]$ y se denota por $\int_a^b f(x)dx$.

Los números a y b se les llaman *límites de integración*.

Adoptaremos el convenio $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ y cuando $a = b$, definiremos $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Observación (Interpretación geométrica). *Observemos que si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, al aumentar n consideramos cada vez particiones más finas, luego las sumas inferiores de Riemann se aproximan cada vez más por defecto al área comprendida entre la gráfica $f(x)$, el eje OX, la recta $x = a$ y la recta $x = b$ y con las sumas superiores nos aproximamos por exceso.*



Así que si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ y f es integrable Riemann, $\int_a^b f(x)dx$ coincide con el área determinada por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Proposición (Aplicación al cálculo de límites). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $(\mathcal{P}_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de particiones de $[a,b]$ tales que $\mathcal{P}_{n+1}$ es más fina que $\mathcal{P}_n$, $n = 1, 2, \ldots, \infty$, y $\lim_{n\to\infty} \delta(\mathcal{P}_n) = 0$. Si f es integrable en $[a,b]$, entonces se verifica:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}, f, [a,b], \boldsymbol{\xi}^n),$$

donde, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\xi}^n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots, \xi_{n-1}^n)$ forma parte de una sucesión de vectores cualquiera tales que $\xi_j \in [x_j^n, x_{j+1}^n]$ para todo $j \in \{0, \ldots, n-1\}$.

3. Funciones integrables: propiedades

La relación entre continuidad e integrabilidad es estrecha, los dos siguientes teoremas lo muestran.

Teorema (Continuidad-Integrabilidad). *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua entonces f es integrable en $[a,b]$.*

Teorema. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada y tiene como máximo un número finito de puntos de discontinuidad, entonces f es integrable en $[a,b]$.*

Con respecto a la integral de Riemann y las operaciones entre funciones se obtiene:

Proposición. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $f+g$, αf, $|f|$ y fg son integrables, además:*

1. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
2. $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$.
3. *Si* $f(x) \geq 0$ *para todo* $x \in [a,b]$, *entonces:* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
4. *Si* $f(x) \geq g(x)$ *para todo* $x \in [a,b]$ *entonces:* $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
5. $\int_a^b |f(x)|dx \geq |\int_a^b f(x)dx|$.

6. *Si* $c \in [a,b]$ *entonces* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Por último daremos el primer teorema de la media:

Teorema (Media). *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.*

Teorema (Teorema fundamental del cálculo integral). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces definimos $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Si f es continua en $x_0 \in [a,b]$ entonces F es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Así que, para derivar

$$\begin{array}{rcl} F: \ [1,+\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & \int_1^x e^{\frac{-1}{t^2}}dt, \end{array}$$

no es necesario el cálculo de la integral, basta con aplicar el teorema anterior para obtener que si $x_0 \in (1,+\infty)$ se tiene:

$$F'(x_0) = e^{\frac{-1}{x_0^2}}.$$

4. La regla de Barrow. Integración por partes y cambio de variable

Proposición. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces la función:*

$$\begin{array}{rcl} F: \ [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & \int_a^x f(x)dx, \end{array}$$

es una primitiva de f.

El siguiente resultado permite, a partir del conocimiento de una primitiva de una función integrable, calcular integrales de ésta. Será el procedimiento que utilicemos a la hora de calcular integrales.

Teorema (Barrow). *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f, entonces $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.*

Por último, introduciremos las técnicas de integración por partes y por cambio de variable que permiten simplificar el cálculo de integrales.

Teorema (Integración por cambio de variable). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a,b]$ y $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ una función inyectiva con derivada integrable en $[c,d]$, de tal manera que $g(c) = a$ y $g(d) = b$. Entonces:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt.$$

Teorema (Integración por partes). *Dadas dos funciones derivables, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, con derivadas integrables en $[a,b]$, se tiene:*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

5. Aplicaciones del cálculo integral al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes

Cálculo de la longitud de una curva. Consideremos la curva definida por la función derivable $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Entonces la longitud de dicha curva es:

$$\boxed{L=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx}$$

Cálculo del área de una superficie plana. Recordemos que por definición de la integral de Riemann, si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ con $f(x)\geq 0$ para todo $x\in[a,b]$ es integrable, entonces el área delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje Ox y las rectas $x=a$ y $x=b$ es $\int_a^b f(x)dx$. Como consecuencia de esto, si $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ son integrables con $f(x)\geq g(x)$ para todo $x\in[a,b]$ entonces el área delimitada por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$, la recta $x=a$ y la recta $x=b$ es:

$$\boxed{A=\int_a^b(f(x)-g(x))dx}$$

Cálculo del área de un sólido de revolución al girar sobre el eje Ox. Consideremos el sólido tridimensional que se obtiene al girar la gráfica de la función[9] $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivable y con derivada continua sobre el eje Ox. Entonces el área de la superficie exterior de dicho sólido es:

$$\boxed{A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx}$$

Cálculo del área de un sólido de revolución al girar sobre el eje Oy.

$$\boxed{A=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}dx}$$

Cálculo del volumen de un sólido de revolución al girar sobre el eje Ox. Consideremos el sólido tridimensional que se obtiene al girar la gráfica de la función[10] $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable sobre el eje Ox. Entonces el volumen de dicho sólido es

$$\boxed{V=\pi\int_a^b f(x)^2dx}$$

Cálculo del volumen de un sólido de revolución al girar sobre el eje Oy.

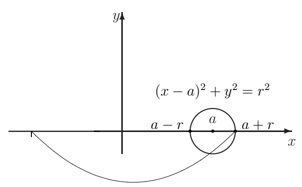
$$\boxed{V=\pi\int_a^b|y'(x)|x^2dx}$$

[9] Suponemos que dicha gráfica no corta al eje Oy

[10] Suponemos que dicha gráfica no corta al eje Ox

Ejemplo. *Calcula el volumen de un toro (donut) que se obtiene al girar un círculo de radio r alrededor de un eje que se encuentra a distancia a del centro del círculo.*

Suponemos que el eje de rotación es el eje y y que el centro del círculo se encuentra sobre el eje de abscisas, es decir el centro es el punto $(a,0)$.



El círculo que estamos girando tiene ecuación $(x-a)^2+y^2=r^2$, así que $y=\pm\sqrt{r^2-(x-a)^2}$. Definamos $y_1=\sqrt{r^2-(x-a)^2}$, así que:

$$V=2\left(\pi\int_a^{a+r}x^2\frac{x-a}{\sqrt{r^2-(x-a)^2}}dx-\pi\int_{a-r}^a x^2\frac{a-x}{\sqrt{r^2-(x-a)^2dx}}\right)$$
$$=2\pi\int_{a-r}^{a+r}x^2\frac{x-a}{\sqrt{r^2-(x-a)^2}}dx$$

Hacemos ahora el cambio de variable $x-a=r\,\mathrm{sen}\,\theta$, así que $dx=r\cos\theta d\theta$ y $x=a+r\,\mathrm{sen}\,\theta$.

$$
\begin{aligned}
V&=2\pi\int_{3\pi/2}^{5\pi/2}(a+r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\frac{r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r\cos\theta}r\cos\theta d\theta\\
&=2\pi\int_{3\pi/2}^{5\pi/2}(a+r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2r\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta\\
&=2\pi\int_{3\pi/2}^{5\pi/2}a^2r\,\mathrm{sen}\,\theta+r^3\mathrm{sen}^3\theta+2ar^2\mathrm{sen}^2\theta d\theta\\
&=2\pi a^2r\left[-\cos\theta\right]_{3\pi/2}^{5\pi/2}-2\pi r^3\left[\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{3\pi/2}^{5\pi/2}\\
&\quad+2\pi 2ar^2\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\mathrm{sen}\,(2\theta)}{4}\right]_{3\pi/2}^{5\pi/2}\\
&=2ar^2\pi^2
\end{aligned}
$$

Otra forma de realizar el ejercicio: *girando alrededor del eje de abscisas un círculo de centro $(0, a)$ y radio r, que tendrá por ecuaciones a $x^2 + (y-a)^2 = r^2$, por lo tanto $y = a \pm \sqrt{r^2 - x^2}$. En este caso:*

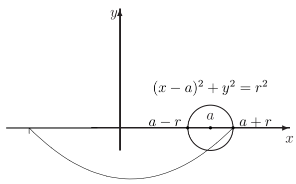
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^{r} (a + \sqrt{r^2 - x^2})^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2 dx \\ &= \pi \int_{-r}^{r} [(a + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2] dx \\ &= \pi \int_{-r}^{r} 4a\sqrt{r^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

Hacemos ahora el cambio de variable $x = r\operatorname{sen}\theta$, $dx = r\cos\theta d\theta$:

$$\begin{aligned} V &= \pi 4a \int_{3\pi/2}^{5\pi/2} r\cos\theta r\cos\theta d\theta \\ &= \pi 4ar^2 \int_{3\pi/2}^{5\pi/2} \cos^2\theta d\theta \\ &= 4ar^2\pi \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4}\right]_{3\pi/2}^{5\pi/2} \\ &= 2ar^2\pi^2. \end{aligned}$$

Ejemplo. *Calcula el área de un toro (donut) que se obtiene al girar un círculo de radio r alrededor de un eje que se encuentra a distancia a del centro del círculo.*

Suponemos que el eje de rotación es el eje y y que el centro del círculo se encuentra sobre el eje de abscisas, es decir el centro es el punto $(a, 0)$.



El círculo que estamos girando tiene ecuación $(x-a)^2 + y^2 = r^2$, así que $y = \pm\sqrt{r^2 - (x-a)^2}$. Definamos $y_1 = \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$, así que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A &= 2\pi \int_{a-r}^{a+r} x\sqrt{1 + y_1'(x)^2} dx \\ &= 2\pi \int_{a-r}^{a+r} x\sqrt{1 + \frac{(x-a)^2}{r^2 - (x-a)^2}} dx \\ &= 2\pi \int_{a-r}^{a+r} x\sqrt{\frac{r^2}{r^2 - (x-a)^2}} dx \end{aligned}$$

Hacemos ahora el cambio de variable $x = r\operatorname{sen}\theta$, $dx = r\cos\theta d\theta$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A &= 2\pi \int_{3\pi/2}^{5\pi/2} (a + r\operatorname{sen}\theta)\frac{r}{r\cos\theta} r\cos\theta d\theta \\ &= 2\pi r \int_{3\pi/2}^{5\pi/2} (a + r\operatorname{sen}\theta) d\theta \\ &= 2\pi r[a\theta - r\cos\theta]_{3\pi/2}^{5\pi/2} \\ &= 2\pi r a\pi = 2ar\pi^2. \end{aligned}$$

Así que $A = 4ar\pi^2$.

6. Métodos numéricos para calcular integrales.

La regla del trapecio Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable, la regla del trapecio consiste en aproximar la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ por $\int_a^b P_1(x)dx$, donde $P_1(x)$ es el único polinomio de grado 1 (recta) que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Así que:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

y el error que cometemos en dicha aproximación, si la función f es de clase $\mathcal{C}^2$, es:

$$E = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(c),$$

donde c es un punto del intervalo (a, b).

El error anterior puede reducirse si utilizamos la *regla del trapecio compuesta*, ésta consiste en dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de longitud $h = \frac{b-a}{n}$ y aplicar la regla del trapecio simple a cada uno de los intervalos $[a + jh, a + (j+1)h]$ con $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Este método proporciona la aproximación:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) + f(b)\right),$$

para esta aproximación el error que se comete, si f es de clase $\mathcal{C}^2$, es:

$$E = -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(c),$$

siendo c un punto del intervalo (a, b).

La regla de Simpson. La idea de esta regla es aproximar la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a integrar por el polinomio de grado 2 (único) que pasa por los puntos $(a, f(a))$, $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ y $(b, f(b))$. De esta manera, se obtiene la aproximación:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right).$$

Además, si la función es de clase $\mathcal{C}^4$, existe $c \in (a, b)$ tal que, el error que se comete en la aproximación es:

$$E = -\frac{1}{2880}(b-a)^5 f^{(iv)}(c).$$

Al igual que en la regla del trapecio, si subdividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes (con n número par) y aplicamos a cada una de ellas la regla de Simpson, se obtiene una mejor aproximación de la integral:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{i=2}^{n/2} f(a + 2(i-1)h)\right.$$
$$\left. +4\sum_{i=1}^{n/2} f\left(a + (2i-1)h\right) + f(b)\right),$$

con un error, si f es de clase $\mathcal{C}^4$, dado por:

$$E = -\frac{1}{180}(b-a)h^4 f^{(iv)}(c),$$

estando c en (a, b).

Ejemplo. *Comparación del valor de* $\int_3^4(\operatorname{sen} x + \cos x + e^x)dx = 33{,}278341730851935$ *calculado usando las reglas del trapecio y Simpson haciendo* n *particiones del intervalo* $[3, 4]$, $(2 \leq n \leq 50)$.

***Programa de* Mathematica:**

```
TrapecioCompuesta[fun_, a_, b_, n_] :=
{integral = 0;
h = (b - a)/n;
For[j = 0, j < n,
    integral = integral+Trapecio[fun, a+hj, a+(j+1)h];
    j = j + 1];
integral//N}
```

También se puede definir el método del trapecio compuesto en Mathematica usando las fórmulas desarrolladas en la teoría:

```
TrapecioCompuestaBis[fun_, a_, b_, n_] :=
{h = (b - a)/n;
integral = (f[a] + f[b]) * h/2;
For[j = 1, j <= n - 1,
    integral = integral + hf[a + jh];
    j = j + 1];
integral//N}
```



```
SimpsonCompuestaBis[fun_,a_,b_,n_] :=
{h = (b - a)/n;
integral = (f[a] + f[b]) * h/3;
For[j = 1, j <= n/2,
    integral = integral + 4h/3f[a + (2j - 1)h];
    j = j + 1];
For[j = 2, j <= n/2,
    integral = integral + 2h/3f[a + 2(j - 1)h];
    j = j + 1];
integral//N}

For[n = 2, n <= 50,
    simpson = SimpsonCompuesta[f, 3, 4, n];
    trapecio = TrapecioCompuesta[f, 3, 4, n];
    exacto = Integrate[f[x], x, 3, 4];
    errorsimpson = Error[simpson, exacto];
    errortrapecio = Error[trapecio, exacto];
    Print["Para n=", n, " el valor aproximado por Simpson es:
",
    InputForm[simpson], " y por el trapecio: ", InputForm[trapecio]];
    Print["El error de Simpson es: ", errorsimpson, " y el del
```

```
trapecio: ",
    errortrapecio];
    n = n + 2;
]
Print["El valor exacto de la integral es: ", InputForm[exacto
// N]]
```

<u>Resultados obtenidos con</u> **<u>Mathematica:</u>**

1. *Para* $n = 2$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,279058180108045 *y por el trapecio:* 34,02019810976089.

   El error de Simpson es: 0,000716449 *y el del trapecio:* 0,741856.

2. *Para* $n = 4$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,278386777441625 *y por el trapecio:* 33,46434316252127.

   El error de Simpson es: 0,0000450466 *y el del trapecio:* 0,186001.

3. *Para* $n = 6$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,27835063881905 *y por el trapecio:* 33,36105351045315.

   El error de Simpson es: $8{,}907967109506032 \times 10^{-6}$ *y el del trapecio* 0,08271177960120712.

4. *Para* $n = 8$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,27834455048327 *y por el trapecio:* 33,32487587371154.

   El error de Simpson es: $2{,}8196313290873576 \times 10^{-6}$ *y el del trapecio* 0,04653414285960866.

5. *Para* $n = 10$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,27834288598059 *y por el trapecio:* 33,308126180449406.

   El error de Simpson es: $1{,}1551286529520866 \times 10^{-6}$ *y el del trapecio* 0,029784449597466844.

6. *Para* $n = 12$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,278342287970716 *y por el trapecio:* 33,29902635672758.

   El error de Simpson es: $5{,}571187766673091 \times 10^{-7}$ *y el del trapecio* 0,020684625875641016.

7. *Para* $n = 14$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,278342031588494 *y por el trapecio:* 33,29353903317648.

   El error de Simpson es: $3{,}007365545482088 \times 10^{-7}$ *y el del trapecio* 0,01519730232454708.

8. *Para* $n = 16$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,2783419071449 *y por el trapecio:* 33,28997738129034.

   El error de Simpson es: $1{,}7629296666932248 \times 10^{-7}$ *y el del trapecio* 0,011635650438402534.

9. *Para* $n = 18$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,278341840913676 *y por el trapecio:* 33,28753544812954.

   El error de Simpson es: $1{,}100617434968143 \times 10^{-7}$ *y el del trapecio* 0,00919371727760665.

10. *Para* $n = 20$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,27834180306481 *y por el trapecio:* 33,285788709597796.

    El error de Simpson es: $7{,}221287989800373 \times 10^{-8}$ *y el del trapecio* 0,007446978745856425.

11. *Para* $n = 22$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,27834178017495 *y por el trapecio:* 33,28449630017032.

    El error de Simpson es: $4{,}9323015671731696 \times 10^{-8}$ *y el del trapecio* 0,006154569318378433.

12. *Para* $n = 24$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,27834176567768 *y por el trapecio:* 33,28351330515993.

    El error de Simpson es: $3{,}4825741179744796 \times 10^{-8}$ *y el del trapecio* 0,005171574307989202.

13. *Para* $n = 26$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,2783417561365 *y por el trapecio:* 33,28274829693282.

    El error de Simpson es: $2{,}5284559113103455 \times 10^{-8}$ *y el del trapecio* 0,004406566080883634.

14. *Para* $n = 28$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,27834174965024 *y por el trapecio:* 33,282141281985496.

    El error de Simpson es: $1{,}8798298695443805 \times 10^{-8}$ *y el del trapecio* 0,003799551133563339.

15. *Para* $n = 30$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,27834174511683 *y por el trapecio:* 33,281651570503875.

    El error de Simpson es: $1{,}4264893932747214 \times 10^{-8}$ *y el del trapecio* 0,0033098396519430917.

16. *Para* $n = 32$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,27834174187124 *y por el trapecio:* 33,28125077568126.

    El error de Simpson es: $1{,}1019305246051658 \times 10^{-8}$ *y el del trapecio* 0,00290904482931853.

17. *Para* $n = 34$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,278341739498465 *y por el trapecio:* 33,28091860547047.

    El error de Simpson es: $8{,}646533045109095 \times 10^{-9}$ *y el del trapecio* 0,0025768746185359515.

18. *Para* $n = 36$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,27834173773128 *y por el trapecio:* 33,28064024271764.

    El error de Simpson es: $6{,}87934220700015 \times 10^{-9}$ *y el del trapecio* 0,002298511865698627.

19. *Para* $n = 38$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,27834173639335 *y por el trapecio:* 33,2804046637003.

    El error de Simpson es: $5{,}5414186572733115 \times 10^{-9}$ *y el del trapecio* 0,0020629328483703357.

20. *Para* $n = 40$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,27834173536551 *y por el trapecio:* 33,28020352969805.

    El error de Simpson es: $4{,}513575957432181 \times 10^{-9}$ *y el del trapecio* 0,0018617988461169244.

21. *Para* $n = 42$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,27834173456529 *y por el trapecio:* 33,28003043881075.

    El error de Simpson es: $3{,}713348517564441 \times 10^{-9}$ *y el del trapecio* 0,001688707958815483.

22. *Para* $n = 44$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,278341733934774 *y por el trapecio:* 33,27988041017379.

    El error de Simpson es: $3{,}0828413155603585 \times 10^{-9}$ *y el del trapecio* 0,0015386793218492567.

23. *Para* $n = 46$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,27834173343264 *y por el trapecio:* 33,279749521588194.

    El error de Simpson es: $2{,}5807007641986957 \times 10^{-9}$ *y el del trapecio* 0,001407790736261516.

24. *Para* $n = 48$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,27834173302867 *y por el trapecio:* 33,279634650548246.

    El error de Simpson es: $2{,}1767287972096483 \times 10^{-9}$ *y el del trapecio* 0,001292919696306738.

25. *Para* $n = 50$ *el valor aproximado por Simpson es:* 33,27834173270066 *y por el trapecio:* 33,27953328627316.

    El error de Simpson es: $1{,}8487280595280708 \times 10^{-9}$ *y el del trapecio* 0,0011915554212247326.

26. *El valor exacto de la integral es:* 33,278341730851935.

7. Integrales impropias de primera especie

Las integrales impropias de primera especie son aquellas donde alguno o ambos límites de integración son infinitos.

Definición. Si $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ es tal que f es integrable en $[a, b]$ para todo $b > a$, se define

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx.$$

Si el valor anterior es finito, diremos que la integral anterior es convergente, si es $+\infty$ o $-\infty$ diremos que es divergente y si no existe diremos que es oscilante.

De forma análoga se define $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ para $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es integrable en $[a, b]$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, entonces diremos que la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ es convergente si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ y $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ son convergentes y en ese caso se define[11]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Por último, se dice que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es *absolutamente convergente* si $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ es convergente. Se hará notar que toda integral

[11] Demostraremos que este valor no depende del número $a \in \mathbb{R}$ escogido

impropia absolutamente convergente es convergente.

Cálculo de integrales impropias de primera especie. Al igual que para la integral de Riemann, las integrales impropias son fáciles de calcular cuando se conoce una primitiva del integrando.

Teorema.

1. *Si* $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *es tal que* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *es convergente y* $F(x)$ *es una primitiva de* $f(x)$ *entonces:*
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} F(t) - F(a).$$
2. *Si* $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ *es tal que* $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ *es convergente y* $F(x)$ *es una primitiva de* $f(x)$ *entonces:*
$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = F(a) - \lim_{t\to-\infty} F(t).$$
3. *Si* $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ *es tal que* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *es convergente y* $F(x)$ *es una primitiva de* $f(x)$ *entonces:*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

Criterios de convergencia. Como ya sabemos, es posible que sea muy difícil o incluso imposible encontrar una primitiva de una función dada. Así, sería muy interesante obtener criterios que permitan conocer el carácter de una integral impropia sin conocer su valor.

Vamos a introducir criterios para funciones $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, +\infty)$. De forma análoga se tienen los criterios para integrales impropias del tipo $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ siendo $f(x) \leq 0$ para todo $x \in (-\infty, a]$.

Proposición. *Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, +\infty)$, f es integrable en $[a, b]$ para todo $b > a$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) > 0$. Entonces $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es divergente.*

Así, aplicando este criterio se obtiene la divergencia de integrales impropias del tipo $\int_a^{+\infty} x^n dx$ siendo $n \geq 0$ o de $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^2+2}dx$, pero no podemos decir nada sobre el carácter de la integral impropia $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Los siguientes criterios permiten deducir el carácter de ciertas integrales impropias a partir del conocimiento del carácter de integrales impropias de otras funciones.

Proposición (Criterio de comparación). *Sean $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ positivas tales que f, g son integrables en $[a, b]$ para todo $b > a$ y supongamos que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, +\infty)$. Entonces:*

1. *Si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es convergente entonces $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ es convergente.*

2. *Si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ es divergente entonces $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es divergente.*

Proposición (Criterio del límite). *Sean $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones positivas integrables en $[a, b]$ para todo $b > a$. Sea $l = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$. Entonces:*

1. *Si $l > 0$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es convergente (divergente) si y sólo si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ es convergente (divergente).*
2. *Si $l = 0$ y $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es divergente entonces $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ es divergente.*
3. *Si $l = 0$ y $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ es convergente entonces $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es convergente.*

Es sencillo demostrar que para $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ es convergente si $\alpha > 1$ y divergente si $\alpha \leq 1$. El criterio anterior junto con el carácter de estas integrales impropias permiten obtener el carácter de muchas integrales impropias.

8. Integrales impropias de segunda especie

Supongamos que tenemos una función $f[a, b) \to \mathbb{R}$ integrable en $[a, c]$ para todo $c \in (a, b)$ y tal que $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$ ¿Qué significado tiene la expresión $\int_a^b f(x)dx$? En principio, a esta expresión no la hemos dotado de un significado concreto ya que la función f no es acotada, nos ocuparemos en esta sección de darle un significado.

Definición (Integral impropia de segunda especie). Sea f una función como antes. Entonces, se define

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx.$$

Si este límite es finito, se dice que la integral impropia de segunda especie $\int_a^b f(x)dx$ es *convergente*, si es infinito se dice que es *divergente* y si no existe se dice que es *oscilante*.

Análogamente, si $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable en $[c, b]$ para todo $c \in (a, b)$ y $\lim\limits_{x\to a^+} = \infty$, se define

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

y se tienen análogas definiciones de convergencia, divergencia y oscilación.

Al igual que para integrales impropias de primera especie, en las condiciones anteriores de la función f, se dice que la integral $\int_a^b f(x)dx$ es *absolutamente convergente* si y solo si $\int_a^b |f(x)|dx$ es convergente. Además se verá que la convergencia absoluta de una integral de segunda especie implica también la convergencia de la integral.

Cálculo de las integrales impropias de segunda especie.
Para estas integrales también dispondremos de un análogo a la regla de Barrow, la dos proposiciones siguientes lo recogen.

Proposición. *Sea $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$, $\int_a^b f(x)dx$ es convergente y supongamos que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$. Entonces:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - \lim_{t\to a^+} F(t).$$

Proposición. *Sea $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$, $\int_a^b f(x)dx$ es convergente y supongamos que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$. Entonces:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} F(t) - F(a).$$

Criterios de convergencia de las integrales impropias de segunda especie. En cuanto a los criterios de convergencia, dispondremos del criterio de comparación y del límite, ambos los enunciamos para integrales impropias que tienen su singularidad en el límite inferior. Los resultados análogos para cuando se tiene la singularidad en el extremo superior son también ciertos y se deja su enunciado como ejercicio al alumno.

Proposición (Criterio de comparación). *Sean $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ positivas, integrables en $[c, b]$ para todo $c \in (a, b)$ y tales que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty$. Si $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in (a, b]$ entonces:*

1. *Si $\int_a^b f(x)dx$ es convergente entonces $\int_a^b g(x)dx$ es convergente.*
2. *Si $\int_a^b g(x)dx$ es divergente entonces $\int_a^b f(x)dx$ es divergente.*

Proposición (Criterio del límite). *Sean $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ funciones positivas, integrables en $[c, b]$ para todo $c \in (a, b)$ y tales que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$. Sea $l = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$. Entonces:*

1. *Si $l \neq 0$, $\int_a^b f(x)dx$ es convergente (resp. divergente) si y sólo si $\int_a^b g(x)dx$ es convergente (resp. divergente).*
2. *Si $l = 0$ y $\int_a^b g(x)dx$ es convergente entonces $\int_a^b f(x)dx$ es convergente.*
3. *Si $l = 0$ y $\int_a^b f(x)dx$ es divergente entonces $\int_a^b g(x)dx$ es divergente.*

De este criterio, junto con el hecho de que para funciones del tipo $f(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ se tiene que $\int_a^b \frac{1}{(x-x_0)^\alpha}dx$ es convergente si $\alpha < 1$ y divergente si $\alpha \geq 1$, se obtiene la convergencia de muchas integrales impropias de segunda especie.

Tema 8: Integración multidimensional

Gabriel Soler López

marzo de 2006

1. Integrales de Riemann en rectángulos

Definición (Partición de rectángulos). Consideremos el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$ y sean $\mathcal{P}_1 = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{c = y_0, y_1, \ldots, y_m = d\}$ particiones de $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente. Entonces, diremos que

$$\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 = \{(x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

es una *partición de* $[a, b] \times [c, d]$.

A partir de $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ se obtiene una descomposición del rectángulo como unión de los rectángulos $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq j \leq m-1$.

Definiremos por diámetro de la partición al número $\delta(\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) = \max_{(i,j)\in\{0,\ldots,n-1\}\times\{0,\ldots,m-1\}} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}$.

Definición (Sumas de Darboux-Riemann). Sea $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ una función acotada y

$$\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 = \{(x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

una *partición de* $[a, b] \times [c, d]$. Entonces:

1. Se define la *suma inferior de Darboux-Riemann de f asociada a la partición* $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ como
$$\mathrm{s}(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j),$$
donde $m_{ij} = \min\{f(x, y) : (x, y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]\}$.
2. Se define la *suma superior de Darboux-Riemann de f asociada a la partición* $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ como
$$\mathrm{S}(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j),$$
donde $M_{ij} = \max\{f(x, y) : (x, y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]\}$.

Definición (Función integrable Riemann). Se dice que la función $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ es *integrable Riemann* si existe un único número real, I, tal que:

$$\mathrm{s}(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) \leq I \leq \mathrm{S}(f, \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2)$$

para toda partición $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ de $[a,b] \times [c,d]$. Entonces diremos que I es la integral (doble) de f en $[a,b] \times [c,d]$ y escribiremos:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = I.$$

Proposición. *Dada $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ entonces, si f es continua es integrable.*

Interpretaciones para calcular áreas y volúmenes

1. Cuando la función f es positiva, la integral de f en $[a,b] \times [c,d]$ coincide con el volumen delimitado por la gráfica de la función f y dicho rectángulo.
2. Cuando la función f es idénticamente igual a 1, el valor de la integral es $(b-a)(d-c)$, es decir, el área del recinto sobre el que integramos. Esta observación trivial tendrá importancia cuando generalicemos la integral a otro tipo de recintos.

Teorema (Fubini). *Si $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ es continua entonces:*

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$
$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Ejercicio

Calcular para $\Omega = [0,1] \times [0,3]$ las integrales

(a) $\iint_\Omega xydxdy$. (b) $\iint_\Omega xe^y dxdy$. (c) $\iint_\Omega y^2 \mathrm{sen}\, xdxdy$.

2. Integral doble sobre recintos básicos de $\mathbb{R}^2$

Definición (Recinto básico de $\mathbb{R}^2$). Un *recinto básico de* $\mathbb{R}^2$ es un conjunto acotado, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, que tiene interior no vacío y frontera formada por una unión finita de curvas de la forma $y = f(x)$ y $x = g(y)$, donde f y g son funciones reales de una variable real continuas.

Definición (Integral de Riemann sobre conjuntos básicos). Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función acotada donde Ω es un recinto básico y sea $[a,b] \times [c,d]$ el menor rectángulo que contiene a Ω. Entonces, si la función

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f} : [a,b] \times [c,d] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & \tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in \Omega, \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin \Omega, \end{cases} \end{array}$$

es integrable, diremos que f es *integrable en* Ω. En ese caso se define la integral (doble) de f en Ω como:

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \tilde{f}(x,y)dxdy.$$

Interpretaciones geométricas de integrales sobre recintos básicos

Si Ω es un recinto básico y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función, entonces:

1. Cuando la función f es positiva, la integral de f en Ω coincide con el volumen delimitado por la gráfica de la función f y el conjunto Ω.
2. Cuando la función f es idénticamente igual a 1, el valor de la integral es el área del recinto Ω.

Propiedades de las integrales sobre recintos básicos

Teorema. *Si Ω es un recinto básico de $\mathbb{R}^2$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es continua entonces f es integrable Riemann en Ω.*

Proposición. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un recinto básico, $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ integrables y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:*

1. *$\alpha f + \beta g$ es integrable en Ω y:*
$$\iint_\Omega (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))dxdy = \alpha \iint_\Omega f(x,y)dxdy + \beta \iint_\Omega g(x,y)dxdy.$$
2. *Si $f(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$, entonces $\iint_\Omega f(x,y)dxdy \geq 0$.*
3. *Si $f(x,y) \geq g(x,y)$ $\forall (x,y) \in \Omega$ entonces $\iint_\Omega f(x,y)dxdy \geq \iint_\Omega g(x,y)dxdy$.*
4. *$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \iint_{\mathrm{Int}(\Omega)} f(x,y)dxdy$.*
5. *Sea $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ con $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ y Ω_1, Ω_2 son recintos básicos. Entonces:*
$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega_1} f(x,y)dxdy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)dxdy.$$

Cálculo de integrales sobre recintos básicos

Para calcular la integral de $f : \Omega \to \mathbb{R}$, siendo Ω un recinto básico:

(1.) Fijamos una de las dos variables de integración y el intervalo máximo sobre el que vamos a integral dicha variable.

(2.) Después delimitaremos los límites de integración de la segunda variable respecto a la primera.

En concreto, si fijamos en (1.) como variable a la x:

- Definimos los conjuntos $\Omega_x = \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in \Omega\}$.
- Elegimos
$$a = \text{mín}\{x : \Omega_x \neq \emptyset\}, \quad b = \text{máx}\{x : \Omega_x \neq \emptyset\}$$
y para cada $x \in (a,b)$ tomamos
$$c(x) = \text{mín}\{y : y \in \Omega_x\}$$
y
$$d(x) = \text{máx}\{y : y \in \Omega_x\}.$$
Supondremos además que $(c(x), d(x)) \in \Omega_x$ y que f es continua.

Con esta notación se tiene:

Teorema (Fubini).
$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Ejercicio

Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que se indican:

1. $\iint_\Omega ydxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
2. $\iint_\Omega (3y^3 + x^2)dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \}$.
3. $\iint_\Omega \sqrt{xy}dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq y\}$.
4. $\iint_\Omega ye^x dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$.
5. $\iint_\Omega y + \log x dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0{,}5 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$.

Ejercicio

Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que a continuación se dan:

1. $\iint_\Omega (4 - y^2)dxdy$ en el recinto limitado por las ecuaciones $y^2 = 2x$ e $y^2 = 8 - 2x$.
2. $\iint_\Omega (x^4 + y^2)dxdy$ en el recinto limitado por $y = x^3$ e $y = x^2$.
3. $\iint_\Omega (x+y)dxdy$ en el recinto limitado por $y = x^3$ e $y = x^4$ con $-1 \leq x \leq 1$.
4. $\iint_\Omega (3xy^2 - y)dxdy$ en la región limitada por $y = |x|$, $y = -|x|$ y $x \in [-1,1]$.

Ejercicio

Calcular la superficie de las siguientes regiones:

1. Círculo de radio R.
2. Elipse de semiejes a, b.
3. La región limitada por las ecuaciones $x^2 = 4y$ y $2y - x - 4 = 0$.
4. La región limitada por las ecuaciones $x + y = 5$ y $xy = 6$.
5. La región limitada por las ecuaciones $x = y$ y $x = 4y - y^2$.

Ejercicio

Calcular el volumen de los siguientes sólidos:

1. El limitado por $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ y los planos de coordenadas.
2. El tronco limitado superiormente por $z = 2x + 3y$ e inferiormente por el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.
3. Esfera de radio R.
4. Cono de altura h y radio de la base R.
5. El tronco limitado superiormente por la ecuación $z = 2x+1$ e inferiormente por el disco $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

3. Cálculo de integrales dobles mediante cambio de variables

Teorema. *Sea Ω un subconjunto abierto y básico de $\mathbb{R}^2$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función integrable. Sea Δ un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbf{\Phi} : \Delta \to \mathbb{R}^2$ una función tal que:*

1. $\mathbf{\Phi}(\Delta) = \Omega$,
2. $\mathbf{\Phi}$ *es diferenciable en* Δ *y*
3. $|\mathrm{J}(\mathbf{\Phi}(u,v))| \neq 0$ *para todo* $(u,v) \in \Delta$.

Entonces, se verifica que Δ es un abierto básico y:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{\Delta} f(\mathbf{\Phi}(u,v))|\mathrm{J}(\mathbf{\Phi}(u,v))|dudv.$$

El cambio de variable que más emplearemos en $\mathbb{R}^2$ es el cambio a coordenadas polares, dado por:

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{\Phi}: & (0,+\infty) \times (0,2\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \to & (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta). \end{array}$$

Además $|J\mathbf{\Phi}(r,\theta)| = r$.

4. Integrales de Riemann en prismas rectangulares de $\mathbb{R}^3$

El concepto de integral triple sobre prismas rectangulares (productos de tres intervalos) se introduce de forma análoga al de la integral doble sobre rectángulos. Ponemos de manifiesto sus propiedades.

Proposición. *Dada $f : [a,b] \times [c,d] \times [e,f] \to \mathbb{R}$ entonces, si f es continua es integrable.*

Interpretación geométrica para el cálculo de volúmenes

Cuando la función f es idénticamente igual a 1, el valor de la integral es $(b-a)(d-c)(f-e)$, es decir, el volumen del prisma sobre el que integramos.

Teorema (Fubini). *Si $f : [a,b] \times [c,d] \times [e,f] \to \mathbb{R}$ es continua entonces:*

$$\begin{aligned} &\iint_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} f(x,y)dxdydz \\ &\qquad = \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)dx \right) dy \right) dz \\ &\qquad\qquad = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y)dz \right) dy \right) dx \end{aligned}$$

Ejercicio

Calcular para $\Omega = [0,1] \times [0,3] \times [-1,1]$ las integrales

(a) $\iiint_\Omega xyz dxdydz$. (b) $\iiint_\Omega xe^{y+z} dxdydz$. (c) $\iiint_\Omega y^2 z^3 \text{sen}\, x dxdydz$.

5. Integral triple sobre recintos básicos de $\mathbb{R}^3$

Definición (Recinto básico). Un recinto básico es un conjunto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ que tenga interior no vacío y frontera formada por una unión finita de superficies de la forma $z = f(x,y)$, $y = g(x,z)$ y $x = h(y,z)$, donde f, g y h son funciones continuas reales de dos variables reales.

Definición (Integral de Riemann sobre conjuntos básicos). Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función acotada donde Ω es un recinto básico de $\mathbb{R}^3$ y sea $[a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ el menor prisma rectangular que contiene a Ω. Si la función

$$\begin{array}{rccl} \tilde{f}: & [a,b] \times [c,d] \times [e,f] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \to & \tilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{si } (x,y,z) \in \Omega, \\ 0 & \text{si } (x,y,z) \notin \Omega, \end{cases} \end{array}$$

es integrable, diremos que f es *integrable en* Ω. En ese caso se define la integral de f en Ω como:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z) dxdy = \iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} \tilde{f}(x,y,z) dxdydz.$$

Interpretación geométrica

$\iiint_\Omega f(x,y,z) dxdydz$ da el valor del volumen del recinto Ω cuando $f(x,y,z) = 1$ para todo $(x,y,z) \in \Omega$. Este hecho se utilizará bastante en las clases de problemas.

Propiedades de la integral triple sobre recintos básicos

Teorema. *Si Ω es un recinto básico de $\mathbb{R}^3$ y una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua, entonces f es integrable Riemann en Ω.*

Además las propiedades vistas para integrales dobles sobre recintos básicos se verifican también en este contexto.

Ejercicio

Calcular las integrales que a continuación se piden en los recintos correspondientes:

1. $\iiint_\Omega (y \text{sen}\, z + x) dxdydz$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq z \geq y^2,\ 0 \leq x, y \leq 1\}$.
2. $\iiint_\Omega x dxdydz$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \geq y^2 + x^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$.
3. $\iiint_\Omega yxz dxdydz$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -5 \leq z \leq y^2 + x,\ -1 \leq x, y \leq 1\}$.

Ejercicio

Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por $z = 1$ e inferiormente por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ejercicio

Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$, inferiormente por el plano $2x + 3y + z + 10 = 0$ y lateralmente por el cilindro circular $x^2 + y^2 + x = 0$.

Ejercicio

Hallar el volumen del sólido limitado por los paraboloides de ecuaciones $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$.

6. Cálculo de integrales triples mediante cambio de variables

Teorema. *Sea Ω un subconjunto abierto básico de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ integrable. Sea $\mathbf{\Phi} : \Delta \to \mathbb{R}^3$ donde Δ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ tal que:*

1. $\mathbf{\Phi}(\Delta) = \Omega$,
2. $\mathbf{\Phi}$ *es diferenciable en* Δ *y*
3. $|\mathrm{J}(\mathbf{\Phi}(u, v, w))| \neq 0$ *para todo* $(u, v, w) \in \Delta$.

Entonces Δ es un abierto básico y:

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dxdydz = \iiint_\Delta f(\mathbf{\Phi}(u, v, w))|\mathrm{J}(\mathbf{\Phi}(u, v, w))|dudvdw.$$

Los cambios de coordenadas más importantes en $\mathbb{R}^3$ son los cambios a coordenadas esféricas y cilíndricas.

Coordenadas cilíndricas

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{\Phi}: \ \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \\ (r, \theta, z) & \to & (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \end{array}$$

Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tal que $\Phi(r, \theta, z) = (x, y, z)$ entonces:

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- θ es el ángulo que forma el vector de posición del punto $(x, y, 0)$ con la parte positiva del eje OX.

Además $|J\mathbf{\Phi}(r, \theta, z)| = r$.

Coordenadas esféricas

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{\Phi}: \ \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times[0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \\ (r, \theta, \varphi) & \to & (r\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, r\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, r\cos\varphi) \end{array}$$

Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ es tal que $\Phi(r, \theta, \varphi) = (x, y, z)$ entonces:

- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- θ es el ángulo que forma el vector de posición del punto $(x, y, 0)$ con la parte positiva del eje Ox

- φ es el ángulo que forma el vector de posición del punto (x, y, z) con el vector de posición del punto $(x, y, 0)$ *(colatitud)*.

  Además $|J\mathbf{\Phi}(r, \theta, \varphi)| = r^2 \operatorname{sen}\varphi$.

Ejercicio

Haciendo uso de las coordenadas esféricas $x = r\cos\theta \operatorname{sen}\phi$, $y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$ y $z = r\cos\phi$, calcular:

1. El volumen de una esfera de radio R.
2. $\iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$ en el recinto $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.
3. El volumen del recinto del apartado (b).

Tema 9: Funciones de varias variables. Continuidad

Gabriel Soler López

abril de 2006

1. Topología en $\mathbb{R}^n$

Definición (Norma, espacio vectorial normado). Una *norma* sobre $\mathbb{R}^n$ es una aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \mathbf{x} & \to & \|\mathbf{x}\|, \end{array}$$

que satisface las siguientes propiedades para cada par de vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}$:

(a) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ y $\|\mathbf{x}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (*desigualdad triangular*).

(c) Para todo número real λ se tiene que $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$.

El par $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ recibe el nombre de *espacio vectorial normado*.

Ejemplo. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_1)$ *son espacios vectoriales normados para las definiciones siguientes:*

1. $|\cdot|$ *es el valor absoluto de números reales.*
2. *Si* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$,
3. $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$,
4. $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$.

Ejercicio

Da una razón que justifique que la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = \operatorname{sen}(y + x)$, no es una norma

Solución. La aplicación no es una norma porque $f(0, \pi) = 0$ y $(0, \pi) \neq (0, 0)$.

1.1. Nociones topológicas asociadas a un espacio normado

El concepto análogo al de intervalo en el caso multidimensional es el de *bola*, éste permitirá desarrollar la topología de $\mathbb{R}^n$.

Definición (Bola, dico). Fijada una norma $\|\cdot\|$ de $\mathbb{R}^n$, dado un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y un número real $\epsilon > 0$, se define la *bola abierta o disco*

abierto de centro $\mathbf{x}$ *y radio* ϵ (resp. *bola cerrada o disco cerrado de centro* $\mathbf{x}$ *y radio* ϵ) como el conjunto

$$D(\mathbf{x}, \epsilon) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \epsilon\}$$

$$(\text{resp. } \overline{D}(\mathbf{x}, \epsilon) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \epsilon\}).$$

Definición (Conjunto abierto y cerrado). Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice *abierto* si y sólo si o $A = \emptyset$ o bien para todo punto $\mathbf{x} \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $D(\mathbf{x}, \epsilon) \subset A$.

Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ se dice *cerrado* si y sólo si $\mathbb{R}^n \backslash F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \notin F\}$ es abierto.

Definición (Interior, clausura y frontera de un conjunto). Dado un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se define el interior de D, y se denota por $\mathrm{Int}D$, como el mayor conjunto abierto contenido en D. La *clausura de* D, denotada por $\mathrm{Cl}D$, es el menor conjunto cerrado que contiene a D. La *frontera de* D se denota por $\mathrm{Fr}D$ y se define como $\mathrm{Fr}D = \mathrm{Cl}D \backslash \mathrm{Int}D$.

Los conjuntos abiertos y cerrados satisfacen las propiedades que recogemos en la siguiente proposición.

Proposición. *1. $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son conjuntos abiertos y cerrados a la vez.*

2. La unión numerable de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

3. La intersección numerable de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

4. La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

5. La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

6. Un conjunto es abierto si y sólo si coincide con su interior.

7. Un conjunto es cerrado si y sólo si coincide con su clausura.

8. El interior de un conjunto A es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A.

9. La clausura de un conjunto A es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A.

Definición (Conjuto acotado y compacto). Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice *acotado* si y sólo si existe un número real positivo k tal que $\|\mathbf{x}\| \leq k$ para todo $\mathbf{x} \in A$. El conjunto A se dirá *compacto* si y sólo si además de ser acotado es cerrado.

Definición (Puntos de acumulación, interiores y aislados). Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ y un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, se dice que $\mathbf{x}$ es un *punto de acumulación* de A si para todo número $\epsilon > 0$ se tiene que $D(\mathbf{x}, \epsilon) \cap A \backslash \{\mathbf{x}\} \neq \emptyset$. El conjunto de los puntos de acumulación se denota por A'.

Se dice que el punto $\mathbf{x}$ es *interior* a A si y sólo si pertenece a Int$A$. Por último se dirá que $\mathbf{x}$ es un punto *aislado* de A si y sólo si es un punto de ClA que no es de acumulación.

Ejercicio

Pon un ejemplo de un conjunto no compacto en $\mathbb{R}^2$ y justifica por qué no es compacto.

Solución. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 5\}$ no es compacto porque no está acotado.

2. Funciones de varias variables. Límites

Iniciamos esta sección dando la definición de función de varias variables y funciones coordenadas de éstas. Posteriormente introduciremos el concepto de curva de nivel, el cual nos permitirá obtener interpretaciones gráficas de funciones.

Definición (Función de varias variables). Una función de varias variables es una aplicación $\mathbf{f} : A \to B$, siendo A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y B un subconjunto de $\mathbb{R}^m$.

Definición (Acotación). Una función de varias variables, $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se dice que está *acotada* si existe un número real K tal que $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| < K$ para todo $\mathbf{x} \in A$.

Definición (Álgebra de funciones). Dado el conjunto de las funciones de varias variables con dominio en $A \subset \mathbb{R}^n$ y valores en $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$, se definen las siguientes leyes en dicho conjunto:

1. **Suma de funciones:** dadas las funciones $\mathbf{f}, \mathbf{g} : A \to \mathbb{R}^m$, se define la función suma de ambas como sigue:
$$\begin{array}{rccl} \mathbf{f}+\mathbf{g}: & A & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{x} & \to & \mathbf{f}(\mathbf{x})+\mathbf{g}(\mathbf{x}). \end{array}$$
2. **Multiplicación de funciones:** si $m = 1$, dadas $f, g : A \to \mathbb{R}$ se define la función producto como sigue:
$$\begin{array}{rccl} f \cdot g: & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathbf{x} & \to & f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}). \end{array}$$
3. **División de funciones:** si $m = 1$, dadas $f, g : A \to \mathbb{R}$, si $g(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in A$, se define la función cociente como sigue:
$$\begin{array}{rccl} \frac{f}{g}: & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathbf{x} & \to & \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}. \end{array}$$
4. **Norma de funciones:** dada la función $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^m$, se define la función norma de $\mathbf{f}$ como:
$$\begin{array}{rccl} \|\mathbf{f}\|: & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathbf{x} & \to & \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|. \end{array}$$

Por último destacamos el concepto de curva de nivel para una función escalar de varias variables reales, las isóbaras e isotermas son ejemplos de tales curvas.

Definición. Dada una función real de dos variables $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definimos la *curva de nivel* de altura k como el conjunto $\{(x, y) \in A : f(x, y) = k\}$.

3. Límite de funciones de varias variables. Propiedades

Generalizamos ahora el concepto de límite de funciones reales de variable real para funciones de varias variables.

Definición (Límite). Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in D'$ y $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^m$. Diremos que el límite de la función $\mathbf{f}$ cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$ es $\mathbf{l}$, y se representa por $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$, si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\mathbf{x} \in D$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ entonces $\|\mathbf{f}(x) - \mathbf{l}\| < \epsilon$.

Proposición. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in D'$ y $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ una función con funciones coordenadas $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m$. Entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$ si y sólo si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}_i(x) = l_i$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.*

Proposición (Unicidad del límite). *Dado $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in D'$ y una función de varias variables $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, entonces si existe el límite de la función $\mathbf{f}$ en el punto $\mathbf{x}_0$, éste es único.*

Ejemplo

Demuestra que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0$.

Solución. Fijado $\epsilon > 0$ tendremos que encontrar $\delta > 0$ tal que si $\|(x, y) - (0, 0)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ entonces $\left|\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} < \epsilon$.

Como

$$\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} < \frac{x^4 + y^4 + 2x^2y^2}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 < \delta^2,$$

entonces basta con tomar $\delta = \sqrt{\epsilon}$.

Proposición. *Dado un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^m$, un punto de acumulación $\mathbf{x}_0 \in D'$, funciones $\mathbf{f}, \mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^m$ y elementos $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ de $\mathbb{R}^m$, se verifican:*

- *Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{m}$ y $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}$ entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = \mathbf{m} + \mathbf{n}$.*

Además, si $m = 1$, se tiene que:

- *Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = m$ y $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = n$ entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f \cdot g)(\mathbf{x}) = m \cdot n$.*
- *Si f está acotada y $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(x) = 0$ entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f \cdot g)(\mathbf{x}) = 0$.*

4. Cálculo de límites de funciones de dos variables

4.1. Límites Iterados

Proposición. *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in D'$, supongamos que $l_{x,y} = \lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) \in \mathbb{R}$ y que $l_{y,x} = \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) \in \mathbb{R}$. Entonces, si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ se tiene que $l_{x,y} = l_{y,x} = l$.*

Como consecuencia del resultado anterior podemos afirmar la no existencia de límite, en particular, el resultado anterior admite las interpretaciones siguientes:

1. Si $l_{x,y}, l_{y,x} \in \mathbb{R}$ y $l_{x,y} \neq l_{y,x}$ entonces no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.
2. Si $l_{x,y}, l_{y,x} \in \mathbb{R}$ y coinciden, el único valor que puede ser $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ es $l_{x,y} = l_{y,x}$ pero no podemos asegurar que exista dicho límite.
3. Puede no existir $l_{x,y}$ o $l_{y,x}$ o los dos y que exista $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$. Un ejemplo de este caso es la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = y\mathrm{sen}\,(1/x)$ si $x \neq 0$ y por $f(0,y) = 0$. En efecto, para esta función se verifica que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$ y sin embargo $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ no existe.

Ejemplo

Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2}.$$

Solución. Si se utilizan límites reiterados se obtienen diferentes valores y se puede justificar de esta manera que el límite doble no existe:

- $\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{x^2+y}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y^2} = \pm\infty$ (dependiendo el signo de si el límite se hace por la derecha o por la izquierda).
- $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{x^2+y}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$.

4.2. Límites direccionales

Definición (Límite direccional). Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función real de dos variables reales y $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real tal que $x_0 \in A'$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$. Si $(x_0, y_0) \in D'$, se define el *límite direccional de f a lo largo de g en* (x_0, y_0) como $l_g = \lim\limits_{x\to x_0} f(x, g(x))$.

Una propiedad básica de los límites direccionales viene recogida en la siguiente proposición.

Proposición. *Sean $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $x_0 \in A'$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$. Entonces, si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \in \mathbb{R}$ se tiene que $l = l_g$.*

Esta proposición tiene consecuencias a tener en cuenta a la hora del cálculo de límites. Sean g_1 y g_2 funciones en las condiciones de g de la definición anterior y f como en la misma definición. Se verifican:

1. Si $l_{g_1} \neq l_{g_2}$, entonces no existe el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.
2. Si $l_{g_1} \notin \mathbb{R}$, entonces no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.
3. Si existe $l_{g_1} \in \mathbb{R}$ entonces, si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, éste coincide con l_{g_1}.

A partir de ahora nos restringiremos al cálculo de límites en $(0,0)$ ya que para calcular un límite en un punto (x_0, y_0), $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, una simple translación hace que este coincida con $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x+x_0, y+y_0)$.

Para intentar demostrar que un cierto límite no existe, utilizaremos funciones del tipo $g(x) = mx^n$.

Ejemplo

Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2}.$$

Solución. Hacemos un límite direccional acercándonos por la parábola $y = \lambda x^2$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \lambda x^2}{x^2 + \lambda^2 x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+\lambda)}{x^2(1+\lambda x^2)} = 1 + \lambda$$

Como el límite direccional depende de la parábola elegida entonces no existe el límite doble planteado.

4.3. Paso a coordenadas polares

Presentamos ahora un resultado que permite calcular el límite de una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en el punto $(0,0)$ usando coordenadas polares.

Proposición. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(0,0) \in D'$ y $f : D \to \mathbb{R}$. Si existe $l \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = l$ para todo $\theta \in [0, 2\pi[$ y $|f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - l| \le F(r)$ para todo $\theta \in [0, 2\pi[$ donde F es una función real de variable real que satisface $\lim_{r\to 0} F(r) = 0$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$.*

Ejemplo

Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

Solución.

Si hacemos el límite por coordenadas polares obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^4}{r^4}(\cos^4\theta + 3\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta + 2\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta) \\
&= \cos^4\theta + 3\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta + 2\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta
\end{aligned}$$

Como este límite depende del ángulo θ no va a existir el límite. Demostramos la no existencia recurriendo a los límites direccionales.

Hacemos un límite direccional acercándonos por las rectas $y = mx$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 + 3x^2m^2x^2 + 2xm^3x^3}{(x^2+m^2x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4}\frac{1+3m^2+2m^3}{(1+m^2)^2} = \frac{1+3m^2+2m^3}{(1+m^2)^2}$$

Como el límite direccional depende de m entonces no existe el límite doble planteado.

Ejemplo

Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{2x^5 + 2y^3\left(2x^2 - y^2\right)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Solución.

Empezamos calculando los límites reiterados para ver si nos da alguna información:

- $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{2x^5}{x^4} = 0$
- $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\frac{-2y^5}{y^4} = 0$

Así que si existe el límite valdría 0.

Intentamos ver si realmente existe usando coordenadas polares:

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) &= \lim_{r\to 0}\frac{2r^5\cos^5\theta + 2r^3\operatorname{sen}^3\theta(2r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta)}{r^4} \\
&= \lim_{r\to 0}\frac{r^5(2\cos^5\theta + 4\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}^3\theta\operatorname{sen}^2\theta)}{r^4} \\
&= \lim r(2\cos^5\theta + 4\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}^3\theta\operatorname{sen}^2\theta) = 0
\end{aligned}$$

Ahora tenemos que hacer la acotación de $|f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - 0|$ por una función $F(r)$ que sólo dependa de r y que tienda a 0 cuando r tiende a 0:

$$\begin{aligned}
&|f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - 0| = |r(2\cos^5\theta + 4\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}^3\theta\operatorname{sen}^2\theta)| \\
&\qquad \le r\left[2|\cos^5\theta| + 4|\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta| + 2|\operatorname{sen}^3\theta\operatorname{sen}^2\theta|\right] \le 8r = F(r)
\end{aligned}$$

Como $\lim_{r\to 0} F(r) = 0$ entonces obtenemos finalmente:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

5. Continuidad de funciones de varias variables

Generalizamos en este apartado la definición de continuidad de funciones reales de variable real a las funciones de varias variables.

Definición (Continuidad). Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{x}_0 \in D$, diremos que $\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{x}_0$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\mathrm{d} > 0$ tal que si $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| <\ \mathrm{d}$ entonces $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| < \epsilon$.

Diremos que la función $\mathbf{f}$ es *continua* si y sólo si es continua en todos los puntos de D.

Al igual que en el caso de funciones reales de variable real había una estrecha relación entre la continuidad y los límites, para las funciones de varias variables existe un resultado análogo que damos a continuación.

Proposición. *Dada una función de varias variables $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y dado $\mathbf{x}_0 \in D'$, entonces son equivalentes:*

1. *$\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{x}_0$,*
2. *existe el límite $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ y es igual a $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.*

5.1. Propiedades de las funciones continuas

Proposición. *Dado un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^m$ y funciones $\mathbf{f}, \mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^m$ continuas en $\mathbf{x}_0 \in D$, se verifican:*

- $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ *es continua e* $\mathbf{x}_0$.
- $\|\mathbf{f}\| : D \to \mathbb{R}$ *es continua en* $\mathbf{x}_0$.

Además, si $m = 1$, se tiene que:

- $f \cdot g$ *es continua en* $\mathbf{x}_0$.

Proposición. *Sean $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{g} : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ dos funciones de varias variables tales que $\mathbf{f}(D) \subset E$. Sea $\mathbf{x}_0 \in D$ tal que $\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{g}$ es continua en $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. Entonces $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{x}_0$.*

Estos teoremas tienen bastante importancia, pues a partir de ellos y basándonos en la continuidad de las funciones coordenadas

$$\begin{array}{rccl} X_i : & D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \to & x_i, \end{array}$$

se obtiene que los polinomios de varias variables reales son continuos y la composición de las funciones que conocemos también. Por ejemplo, funciones del tipo $\mathbf{f}(x, y, z) = (\operatorname{sen}(x^2 y), e^{\operatorname{sen}(x+yz)})$ son continuas.

Al igual que para las funciones reales de variable real, dada una función real dependiente de varias variables reales, $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diremos que $\mathbf{m} \in D$ (resp. $\mathbf{M} \in D$) es un *mínimo absoluto* (resp. *máximo absoluto*) de f si y sólo si $f(\mathbf{m}) \leq f(\mathbf{x})$ (resp. $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{M})$) para todo $\mathbf{x} \in D$.

Teorema (de los valores extremos). *Dado un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ y una función continua $f : K \to \mathbb{R}$, existen valores $\mathbf{m} \in K$ y $\mathbf{M} \in K$ que son respectivamente mínimo y máximo absolutos de la función f.*

Ejercicio

Estudia la continuidad de la función que sigue:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} xy}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ y & \text{si } (x, y) = (0, y). \end{cases}$$

Solución.

Para decidir si es continua hay que ver si se verifica:

$$\lim_{(x,y) \to (0,k)} f(x, y) = f(0, k) = k.$$

Si se verifica la igualdad anterior entonces la función f será continua. En caso contrario no lo sería.

Comprobamos que en este caso se verifica $\lim_{(x,y)\to(0,k)} f(x, y) = k$. Así que, fijado $\epsilon > 0$, debemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $\|(x, y) - (0, k)\|_1 = |x| + |y - k| < \delta$ entonces $|f(x, y) - k| < \epsilon$.

Primera consideración: puesto que $\lim_{x\to 0} 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$, para $\epsilon_x = \frac{\epsilon}{4(|k|+1)}$ existe $\delta_0 > 0$ tal que si $|x - 0| < \delta_0$ entonces

$$\left|1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| < \frac{\epsilon}{4}. \tag{18}$$

Segunda consideración: elegimos ahora

$$\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{8}, \delta_0\}. \tag{19}$$

Demostración del límite: suponemos ahora que $\|(x, y) - (0, k)\|_1 = |x| + |y - k| < \delta$, entonces:

$$\begin{aligned} |f(x, y) - k| &\leq \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x} y - k\right| + |y - k| \\ &\leq \left|\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right) y + y - k\right| + |y - k| \\ &\leq \left|\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right) y\right| + 2|y - k| \\ \leq \left|\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right)\right| &|y| + 2|y - k| \text{ (usando ahora la ecuación (18))} \\ \leq \frac{\epsilon}{4(|k| + 1)}|y| + 2|y - k| &\text{ (usando (19) tenemos que } \frac{|y|}{|k| + 1} < 1) \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} + 2|y - k| \leq \text{ (usando (19)} \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} + 2\frac{\epsilon}{8} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

Tema 10: Funciones de varias variables. Diferenciabilidad

Gabriel Soler López

24 de mayo de 2006

6. Derivadas direccionales y derivadas parciales

En este apartado generalizaremos la noción de *derivada* introducida para las funciones reales de una variable real.

Definición (Derivada direccional). Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Si $\mathbf{a} \in D$, se define la derivada direccional en la dirección del vector $\mathbf{v}$ de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$ como el límite:

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{h}$$

Cuando la derivada direccional se hace en la dirección de la base canónica, se obtiene la definición de *derivada parcial*:

Definición (Derivada parcial). Sea $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathbf{e}_i$ el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$. Se define la *derivada parcial i-ésima* de la función $\mathbf{f}$ en el punto $\mathbf{a} \in D$ y se denota por $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(a)$ o por $D_i\mathbf{f}(\mathbf{a})$ como $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \mathrm{D}_{\mathbf{e}_i}\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Sea $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y consideremos la función de una variable real $\mathbf{f}^i$ que se obtiene de $\mathbf{f}$ fijando todas las coordenadas de $\mathbf{a}$ excepto la i-ésima, es decir:

$$\mathbf{f}^i(x_i) = \mathbf{f}(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Entonces la derivada de esta función (de una variable) en $\mathbf{a}$ es:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\left(\mathbf{f}^i_j(a_i+t) - \mathbf{f}^i_j(a_i)\right)_{j=1}^n}{t} =$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{\left(\mathbf{f}^i_j(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i+t, a_{i+1}, \ldots, a_n) - \mathbf{f}^i_j(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)\right)_{j=1}^n}{t} =$$
$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}^i_j}{\partial x_i}(\mathbf{a})\right)_{j=1}^n .$$

Así, la derivada parcial i-ésima evaluada en $\mathbf{a}$ es el valor que se obtiene de sustituir $\mathbf{a}$ en la función que resulta de derivar $\mathbf{f}$ respecto de x_i considerando las otras variables constantes.

Esta generalización de derivada tiene una diferencia notable respecto a la derivada de de funciones reales de una variable real, pues la existencia en un punto de éstas, no implica la continuidad en dicho punto. El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

Ejemplo.

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to & f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & si \ \ x \neq 0 \\ 0 & si \ \ x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Para esta función, dado un vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ *con* $v_1 \neq 0$, *se tiene que la derivada direccional de* f *en* $(0,0)$ *en la dirección de* $\mathbf{v}$ *es:*

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f((0,0)) = \lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{\frac{t^2v_2^2}{tv_1}}{t} = \frac{v_2^2}{v_1},$$

para los vectores $\mathbf{v}$ *de la forma* $\mathbf{v} = (0, v_2)$, *la derivada direccional es:*

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f((0,0)) = \lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Así que la función f *admite derivada direccional en el punto* $(0,0)$ *respecto de cualquier vector. Sin embargo, si calculamos el límite de la función en el origen según la dirección de la parábola* $y^2 = 2\lambda x$, *éste depende de* λ, *en particular vale* 2λ. *Así que la función* f *no es continua en el origen.*

6.1. Interpretación geométrica de las derivadas parciales de una función de dos variables

La derivada de una función real de variable real, $f : D \to \mathbb{R}$, en un punto a representaba la pendiente de la tangente a la curva $\{(x, f(x)) : x \in D\}$ en el punto $(a, f(a))$.

Dada una función real de dos variables reales, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, su gráfica $\{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) : (x_1, x_2) \in D\}$ representa una superficie.

En cuanto a la interpretación de las derivadas parciales de la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si f admite derivadas parciales en $(x_0, y_0) \in D$, entonces veremos que la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en (x_0, y_0) viene dada por:

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

7. Diferencial de una función. Propiedades

Introducimos en este apartado el concepto de función *diferenciable* que si implicará continuidad.

Definición (Diferencial). Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{a} \in D$. Se dice que $\mathbf{f}$ es *diferenciable en* $\mathbf{a}$ si existe una aplicación lineal $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{T}(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

En ese caso, a la aplicación lineal $\mathbf{T}$ se le llama diferencial de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$ y se denota por $\mathrm{d}\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Teorema. *Dado un subconjunto abierto* D *de* $\mathbb{R}^n$, *se tiene que si* $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ *es diferenciable en* $\mathbf{a} \in D$ *entonces* $\mathbf{f}$ *es continua en* $\mathbf{a}$.

Las nociones de derivada direccional y diferencial están estrechamente relacionadas, esta relación la recoge la siguiente proposición.

Teorema. *Sea* D *un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ *y* $\mathbf{a} \in D$. *Si* $\mathbf{f}$ *es diferenciable en* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, *entonces* $\mathbf{f}$ *es admite derivada direccional en* $\mathbf{a}$ *en la dirección de* $\mathbf{v}$. *Además:*

$$\mathrm{d}\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{v}) = \mathrm{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

En particular $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \mathrm{d}\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{e}_i)$ *para todo* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Cuando tratamos con funciones reales de variable real, la derivabilidad y diferenciabilidad son conceptos equivalentes. En efecto:

Proposición. *Si D es un abierto de $\mathbb{R}$ y $f : D \to \mathbb{R}$ es derivable en $a \in D$, entonces f es diferenciable en a y* $\mathrm{d}f(a)(t) = f'(a)t$.

Para funciones de varias variables reales, ambas nociones no son equivalentes, el teorema anterior muestra que la diferenciabilidad implica existencia de derivadas direccionales. Sin embargo el recíproco no es cierto, en efecto, la función de un ejemplo anterior admite derivadas direccionales y no es diferenciable porque no es continua. A pesar de este ejemplo, si las derivadas parciales son continuas sí que la derivabilidad implica diferenciabilidad:

Teorema. *Sea D un abierto de $\mathbb{R}^n$ que contine al punto $\mathbf{a}$. Si las derivadas parciales, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}$ $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$, existen en un entorno del punto $\mathbf{a}$ y son continuas en el punto $\mathbf{a}$, entonces la función $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$.*

Además, el recíproco del teorema anterior no es cierto puesto que la

función:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to & f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases} \end{array}$$

muestra que existen funciones diferenciables en un punto (el punto $(0,0)$ para esta función f) cuyas derivadas parciales no son continuas en dicho punto.

Demostración.

Empezamos calculando la parcial de f respecto de x. En los puntos distintos del origen se calcula haciendo una derivada parcial normal. Sin embargo en el origen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} t^2 \mathrm{sen}\left(\frac{1}{t}\right) = 0 \end{aligned}$$

Así que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

Esta derivada parcial no es continua en el origen porque el límite cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ no existe. En efecto, tomamos las direc-

ciones $y = \lambda x$ y obtenemos que

$$\lim_{x \to 0} 2x\mathrm{sen}\,\frac{1}{x\sqrt{1+\lambda^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\cos\frac{1}{x\sqrt{1+\lambda^2}}$$

no existe porque el primer sumando tiende a 0, pero el segundo no tiene límite.

Por último vamos a probar que $df(0,0)(h_1,h_2) = 0$. Efectivamente:

$$\begin{aligned} &\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0) - df(0,0)(h_1,h_2)|}{\|(h_1,h_2)\|_2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(h_1^2+h_2^2)\mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2}\mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \end{aligned}$$

7.1. Propiedades de la diferencial

Señalamos en este apartado las propiedades más relevantes de la diferencial.

Teorema. *Dado un abierto $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in D$ y funciones $\mathbf{f}, \mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^m$, se verifican:*

1. *Si $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$ entonces es continua en $\mathbf{a}$.*
2. *Si $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$ entonces la diferencial de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$ es única.*
3. *$\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$ si y sólo si las funciones coordenadas de $\mathbf{f}$ lo son.*
4. *Si $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son funciones diferenciables en $\mathbf{a}$, entonces $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$. Además:*

$$\mathrm{d}(\mathbf{f}+\mathbf{g})(\mathbf{a}) = \mathrm{d}\mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathrm{d}\mathbf{g}(\mathbf{a}).$$

Teorema (Regla de la cadena). *Sean D y E subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente y sean $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{g} : E \to \mathbb{R}^k$ tales que $\mathbf{f}(D) \subseteq E$. Si $\mathbf{a} \in D$ verifica que $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$ y $\mathbf{g}$ lo es en $\mathbf{f}(\mathbf{a})$, entonces $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$ y*

$$\mathrm{d}(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{a}) = \mathrm{d}\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a})) \circ \mathrm{d}\mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

7.2. Matriz Jacobiana

Hacemos uso ahora del álgebra lineal aprendida en el bloque primero de la asignatura. Ya que la diferencial de una función $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en un punto $\mathbf{a} \in D$ es una aplicación lineal, ésta estará determinada por su matriz asociada respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$.

Definición (Matriz Jacobiana). Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{a} \in D$ tal que $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$. Se define la *matriz Jacobiana de f en a* como

$$\mathrm{J}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = M_{B,B'}(\mathrm{d}\mathbf{f}(\mathbf{a})),$$

siendo B y B' las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente.

Concretamente, si $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$ entonces:

$$\mathrm{J}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_m}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x_m}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Un caso particular de la matriz Jacobiana es el *vector gradiente* de una función diferenciable real definida en un abierto de $\mathbb{R}^n$, $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. En este caso la matriz Jacobiana de la función en un punto $\mathbf{a}$ recibe el nombre de *vector gradiente* de f en el punto $\mathbf{a}$ y se denota por $\nabla f(\mathbf{a})$.

Ahora podemos obtener las propiedades de la matriz Jacobiana traduciendo las propiedades de la diferencial anteriormente enunciadas:

Teorema. *Dados abiertos $D \subset \mathbb{R}^n$ y $E \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbf{a} \in D$, funciones $\mathbf{f}, \mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{h} : E \to \mathbb{R}^k$ tales que $\mathbf{f}(D) \subseteq E$, $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son diferenciables en $\mathbf{a}$ y $\mathbf{h}$ es diferenciable en $\mathbf{f}(\mathbf{a})$, se verifican:*

1. $\mathrm{J}(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\mathbf{a}) = \mathrm{J}\mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathrm{J}\mathbf{g}(\mathbf{a})$,
2. $\mathrm{J}(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{a}) = \mathrm{J}\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))\mathrm{J}\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

8. Derivadas parciales de orden superior

Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ e $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Si existe $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}$ en todo punto de D, se puede definir una función

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} : \ D &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{a} &\rightarrow \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \end{aligned}$$

a la cual le podemos estudiar la existencia de sus derivadas parciales. Sea $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ y definamos la *segunda derivada parcial*:

Definición (Derivada parcial segunda). En las condiciones anteriores, entendemos por *derivada parcial segunda de* $\mathbf{f}$*, primero respecto de x_i y después respecto de x_j en* $\mathbf{a} \in D$ como

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}\right)(\mathbf{a}).$$

Del mismo modo se definen las *derivadas parciales terceras, cuartas, etc...*

Definición (Función de clase $\mathcal{C}^k$). La función $\mathbf{f}$ anteriormente introducida se dice *de clase* $\mathcal{C}^k$ si tiene todas las derivadas k-ésimas continuas en D. Escribiremos $f \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^m)$.

Una pregunta que parece natural hacerse es que si dados $i, j \in \{1, \dots, n\}$, es verdad que $\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_j x_i}(\mathbf{a})$. En general dicha igualdad no se da, pero los siguientes teoremas[12] dan condiciones para que sí sea cierta.

Teorema (Schwarz). *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ una función tal que $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}$ son continuas en D siendo $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distintos. Si existe $\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i x_j} : D \to \mathbb{R}^m$ y es continua en $\mathbf{a} \in D$ entonces existe $\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_j x_i}(\mathbf{a})$ y se da la igualdad:*

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_j x_i}(\mathbf{a})$$

.

Teorema (Young-Heffter). *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ una función tal que $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}$ están definidas en D y son diferenciables en el punto $\mathbf{a} \in D$. Entonces existen $\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i x_j}(\mathbf{a})$ y $\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_j x_i}(\mathbf{a})$ y son iguales.*

[12] Aunque sólo damos dos teoremas sobre permutabilidad, el primero en probar un teorema de este corte fue O. Bonnet bajo hipótesis más restrictivas que A. Schwarz

Acabamos poniendo un ejemplo que deja claro que existen funciones para las que sí que importa el orden de derivación. La función:

$$\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases} \end{array}$$

admite las derivadas $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}(0,0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}(0,0)$ pero son distintas. En efecto:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}(0,0) = 1 \text{ y } \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}(0,0) = -1.$$

9. Extremos relativos y absolutos de funciones reales de varias variables

Empezamos recordando la noción de extremo absoluto de una función real, e introduciendo las nociones de extremos relativos. Para ello fijamos una función real definida en un abierto D de $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$.

Definición (Extremos absolutos y relativos). Un punto $\mathbf{M} \in D$ (resp. $\mathbf{m} \in D$) diremos que es un *máximo relativo* (resp. *mínimo relativo*) si existe un entorno $U \subset D$ de $\mathbf{M}$ (resp. de $\mathbf{m}$) tal que $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{M})$ (resp. $f(\mathbf{m}) \leq f(\mathbf{x})$) para todo $\mathbf{x} \in U$.

Un punto $\mathbf{M} \in D$ (resp. $\mathbf{m} \in D$) diremos que es un *máximo absoluto* (resp. *mínimo absoluto*) si $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{M})$ (resp. $f(\mathbf{m}) \leq f(\mathbf{x})$) para todo $\mathbf{x} \in D$.

Teorema (Condición necesaria para la existencia de extremos relativos). *Sea D un abierto de $\mathbb{R}^n$ y una función $f : D \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$. Si $\mathbf{a} \in D$ es un extremo relativo de f entonces $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Esta condición, sin embargo, no es suficiente. En efecto, la función

$$\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & (y-x^2)(y-2x^2), \end{array}$$

tiene sus dos derivadas parciales primeras iguales a 0 en el punto $(0,0)$, pero éste no es un extremo relativo. Es por tanto introducir condiciones adicionales para asegurar la existencia de extremos.

Definición (Hessiano). Sea $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y supongamos que la función f introducida al principio de esta sección es de clase $\mathcal{C}^2$, para ella definimos la *matriz hessiana de orden i* en un punto $\mathbf{a}$ como:

$$H_i f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_i}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_i}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Se define el *Hessiano de orden i de la función f en el punto* $\mathbf{a}$ como:

$$\Delta_i f(\mathbf{a}) = |H_i f(\mathbf{a})|.$$

Teorema. *Sea D un abierto de $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ y $\mathbf{a} \in D$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) = 0$. Consideremos la sucesión:*

$$1, \Delta_1 f(\mathbf{a}), \Delta_2 f(\mathbf{a}), \ldots, \Delta_{n-1} f(\mathbf{a}), \Delta_n f(\mathbf{a}),$$

entonces:

1. *Si todos los términos de la sucesión de números anteriores son positivos la función tendrá un mínimo relativo en* $\mathbf{a}$.
2. *Si los términos de la sucesión anterior son alternadamente positivos y negativos, entonces la función tendrá un máximo relativo.*
3. *En otro caso no se puede asegurar nada, puede existir o no extremo relativo.*

Para funciones de dos variables, se tiene que si $\Delta_2 f(a) < 0$ entonces $\mathbf{a}$ *no es extremo relativo de f.*

Para los casos no contemplados anteriormente es necesario un análisis en las proximidades del punto crítico para determinar si éste es o no un extremo relativo de la función.

Ejemplo

Calcula los extremos relativos de la función $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ con $x > 0$ e $y > 0$;

Solución.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - \frac{50}{x^2} = 0 \Rightarrow yx^2 - 50 = 0 \Rightarrow y = \frac{50}{x^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - \frac{20}{y^2} = 0 \Rightarrow xy^2 - 20 = 0$$

Sustituyendo el valor de y de la primera ecuación en la segunda:

$$x\frac{50^2}{x^4} - 20 = 0 \Rightarrow 125 = x^3 \Rightarrow \boxed{x = 5 \text{ e } y = \frac{50}{x^2} = 2}$$

Así que debemos estudiar la presencia de un extremo relativo sólo en el punto $(5,2)$, para ello calculamos el Hessiano en dicho punto.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{100}{x^3}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{40}{y^3}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 1$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{100}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{400}{y^3} \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(5,2) = \begin{pmatrix} \frac{100}{125} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ahora la sucesión $1, \Delta_1, \Delta_2$ es $1 > 0, \frac{100}{125} > 0, \frac{500}{125} - 1 > 0$, luego en $(5,2)$ la función f presenta un mínimo relativo.

Ejemplo

Calcula los extremos relativos de la función $f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$ siendo $(x,y) \neq (0,0)$;

Solución.

Empezamos haciendo las parciales para buscar los puntos candidatos a extremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\log(x^2+y^2) + xy\frac{1}{x^2+y^2}2x = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\log(x^2+y^2) + xy\frac{1}{x^2+y^2}2y = 0,$$

Ahora resolvemos este sistema:

$$y\log(x^2+y^2) = -\frac{2x^2y}{x^2+y^2}, \qquad (20)$$

$$x\log(x^2+y^2) = -\frac{2xy^2}{x^2+y^2}, \qquad (21)$$

de aquí deducimos:

$$\frac{y}{x} = \frac{2x^2y}{2xy^2} = \frac{x}{y} \Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow y = \pm x$$

Sustituyendo el valor obtenido para y en la ecuación (20):

$$\pm x\log(2x^2) = \mp x \Rightarrow \pm x\log(2x^2) \pm x = 0$$
$$\Rightarrow \pm x(\log(2x^2)+1) = 0 \Rightarrow \log(2x^2)+1 = 0$$
$$\Rightarrow \log(2x^2) = -1 \Rightarrow e^{-1} = 2x^2 \Rightarrow \frac{1}{2e} = x^2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2e}} \\ x = \frac{1}{-\sqrt{2e}} \end{cases}$$

Así que los puntos donde posiblemente se encuentran los extremos relativos son:

$$p_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) \quad p_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$$
$$p_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) \quad p_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$$

Estudiamos ahora el hessiano de f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{4xy(x^2+y^2) - 2x\cdot 2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= y\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x\frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{4xy(x^2+y^2) - 2y\cdot 2y^2x}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= y\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{4yx^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \log(x^2+y^2) + y\frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{2x^2(x^2+y^2) - 2y\cdot 2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= \log(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{2x^4 - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Finalmente calculamos el hessiano, para ello distinguiremos dos casos, primero lo calcularemos en los puntos en los que $x = y$, p_1 y p_3, y luego lo calcularemos en los puntos en los que $x = -y$, p_2 y p_4. Es importante que te des cuenta de que no hace falta recurrir al valor exacto de x e y, lo que simplifica los cálculos.

Puntos p_1 y p_3.

$$Hf(p_1) = Hf(p_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Para estos dos puntos, como la sucesión $1, \Delta_1 = 2, \Delta_1 = 4$, está formada por términos positivos se deduce que en ellos hay un mínimo relativo.

Puntos p_2 y p_4.

$$Hf(p_2) = Hf(p_4) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Para estos dos puntos, como la sucesión $1, \Delta_1 = -2, \Delta_2 = 4$, está formada por términos alternadamente positivos y negativos se deduce que en ellos hay un máximo relativo.

9.1. Multiplicadores de Lagrange

En este apartado presentamos el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular extremos de una función condicionados por algunas ligaduras, aprenderemos pues a resolver problemas del estilo: "encontrar los puntos que están sobre el cilindro de ecuación $x^2+y^2=1$ y sobre el plano de ecuación $x+y+z=1$ y cuya distancia al origen de coordenadas sea máxima o mínima", en este problema, se trata de encontrar un máximo o un mínimo de la función $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ cuando la consideramos definida sólo en el conjunto $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1, x+y+z=1\}$.

Planteamiento del problema. Sea D un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{p+q}$, f una función real definida sobre D y $g_1, g_2, \ldots, g_p : D \to \mathbb{R}$ funciones de

clase $\mathcal{C}^1$ tales que el rango [13] de la matriz

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{(i,j)\in\{1,\ldots,p\}\times\{1,\ldots,p+q\}}$$

sea igual a p. Sea S el conjunto definido por $S = \{\mathbf{x}\in D : g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1,\ldots,p\}$ y sea $\mathbf{a}\in S$.

Se dice que el punto $\mathbf{a}$ es un *máximo relativo condicionado* (resp. *mínimo relativo condicionado*) por las ecuaciones $g_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1,\ldots p$, cuando existe un entorno U de $\mathbf{a}$ tal que $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ (resp. $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$) para todo $\mathbf{x}\in S\cap U$.

Con estas definiciones se tiene la siguiente relación necesaria para la existencia de extremos relativos condicionados.

Teorema (Condición necesaria). *Si la función anterior f es de clase $\mathcal{C}^1$, para que la función f tenga un máximo relativo condicionado en el punto $\mathbf{a}$ es necesario que existan números reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ tales que la función*

$$L = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_p g_p$$

tenga nulas todas sus derivadas parciales primeras en $\mathbf{a}$ (los números λ_i reciben el nombre de multiplicadores de Lagrange).

Teorema (Condición suficiente). *Supongamos que tanto las funciones g_i como la función f son de clase $\mathcal{C}^2$ y existen números*

[13] Esta condición viene a expresar que ninguna ligadura es redundante

reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tales que la función $L = f + \lambda_1 g_1 + \ldots \lambda_p g_p$ tiene todas sus primeras derivadas parciales en $\mathbf{a}\in D\cap S$ nulas. Entonces para que f tenga en $\mathbf{a}$ un mínimo (resp. máximo) relativo condicionado es suficiente que se verifique:

$$\mathbf{h}\left(H_{p+q}L(\mathbf{a})\right)\mathbf{h}^t > 0 \quad (\text{resp.}\,\mathbf{h}\left(H_{p+q}f(\mathbf{a})\right)\mathbf{h}^t < 0),$$

para todo vector $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathrm{J}g_i(\mathbf{a})\mathbf{h}^t = 0$ para todo $i \in 1,\ldots,p$.

Esta visión general del método plantea problemas para entenderlo, por lo que daremos seguidamente, cómo proceder en los casos en que D sea un abierto de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

El método de los multiplicadores de Lagrange en $\mathbb{R}^2$. Supongamos que f es una función de clase $\mathcal{C}^2$ definida sobre un conjunto abierto D de $\mathbb{R}^2$, sea el conjunto de ligaduras $S = \{(x,y)\in D \mid g(x,y) = 0\}$, siendo g una función real de clase $\mathcal{C}^2$ definida sobre D. Para aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange consideraremos la función

$$\begin{array}{rccc} F_\lambda : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to & f(x,y) + \lambda g(x,y). \end{array}$$

Entonces resolvemos el sistema que sigue, teniendo en cuenta las

condiciones de ligadura,

$$\begin{cases} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x}(x,y,\lambda) = 0, \\ \frac{\partial F_\lambda}{\partial y}(x,y,\lambda) = 0, \\ \quad g(x,y) = 0, \end{cases}$$

ahora, los puntos solución son candidatos a extremos relativos condicionados de f.

Sea (x_0, y_0) uno de los candidato a extremo relativo condicionado, siendo λ_0 el valor de λ que dio lugar a tal solución. Planteamos la ecuación

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)h_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)h_2 = 0,$$

de la que despejamos una de las dos incógnitas, h_1 o h_2, en función de la otra.

Por último evaluamos con la incógnita despejada la expresión:

$$(h_1, h_2)\cdot H_2F_{\lambda_0}(x_0,y_0)\cdot\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial^2 F_{\lambda_0}}{\partial x^2}(x_0,y_0)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 F_{\lambda_0}}{\partial xy}(x_0,y_0)h_1h_2 + \frac{\partial^2 F_{\lambda_0}}{\partial y^2}(x_0,y_0)h_2^2,$$

y se tiene:

1. Si la expresión es siempre positiva, entonces (x_0, y_0) es un mínimo relativo condicionado de f.

2. Si la expresión es siempre negativa, entonces (x_0, y_0) es un máximo relativo condicionado de f.

3. En otro caso tendremos que analizar en las proximidades de (x_0, y_0) si éste es o no un extremo relativo condicionado.

Ejemplo

Calcular los extremos de la función que sigue $f(x, y) = xy$ si $x+y = 1$;

Solución. La función de Lagrange será:

$$L(x, y) = xy + \lambda(x + y - 1)$$

y se deben satisfacer las condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y) = y + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y) = x + \lambda = 0, \\ g(x, y) = x + y - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = -\lambda = x, \\ -2\lambda - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = \frac{-1}{2}, \\ x = y = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Así que el punto candidato a extremo relativo es $(x, y) = (1/2, 1/2)$ para $\lambda = -1/2$.

Calculamos el jacobiano de g: $Jg(x, y) = (1, 1) \Rightarrow Jg(1/2, 1/2) = (1, 1)$. Calculamos seguidamente los vectores (h_1, h_2) tales que:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}(1/2, 1/2), \frac{\partial g}{\partial y}(1/2, 1/2)\right) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow h_1 + h_2 = 0 \Rightarrow h_2 = -h_1.$$

Ahora hacemos el cálculo del hessiano de L para $\lambda = -1/2$:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, y) = 0 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

$$HL(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el signo de $(h_1, h_2)HL(x, y)(h_1, h_2)^t$ cuando $h_2 = -h_1 \neq 0$ y $x = y = 1/2$:

$$(h_1, h_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ -h_1 \end{pmatrix} = (h_1, -h_1) \begin{pmatrix} h_1 \\ -h_1 \end{pmatrix} = -h_1^2 - h_1^2 < 0$$

Así que en el punto $(1/2, 1/2)$ es un máximo condicionado.

Ejemplo

Calcula los extremos condicionados de la siguiente función $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ si $x - y = \frac{\pi}{4}$;

Solución. Estudiaremos la función lagrangiana:

$$L(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y + \lambda(x - y - \pi/4),$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2\cos x \operatorname{sen} x + \lambda = 0 \Rightarrow 2\cos x \operatorname{sen} x = \lambda,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2\cos y \operatorname{sen} y + \lambda = 0 \Rightarrow 2\cos y \operatorname{sen} y = \lambda.$$

Por otro lado impondremos la ligadura:

$$g(x, y) = x - y - \pi/4 = 0 \Rightarrow x - y = \pi/4.$$

Así que:

$$\operatorname{sen}(2x) = \lambda,$$
$$\operatorname{sen}(2y) = \lambda,$$
$$x - y = \pi/4.$$

Resolvemos este sistema y obtenemos:

$$x = \pi/4 + y,$$
$$\operatorname{sen}(\pi/2 + 2y) = \lambda = \operatorname{sen}(\pi/2)\cos(2y) + \cos(\pi/2)\operatorname{sen}(2y) \Rightarrow \cos(2y) = \lambda.$$

Ahora tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \cos(2y) = \lambda \\ \operatorname{sen}(2y) = -\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \tan(2y) = -1 \Rightarrow 2y = -\pi/4 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -\frac{\pi}{8} + k\pi/2, \\ x = \frac{\pi}{8} + k\pi/2, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Así que los puntos candidatos a extremos condicionados son:

$$(x_k, y_k) = \left(\frac{\pi}{8} + k\pi/2, -\frac{\pi}{8} + k\pi/2\right), k \in \mathbb{Z},$$
$$\lambda_k = \operatorname{sen}(2x_k) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Calculamos ahora el jacobiano de g en estos puntos:

$$Jg(x_k, y_k) = (1, -1),$$

y ahora los vectores (h_1, h_2) tales que $Jg(x_k, y_k)(h_1, h_2)^t = 0$:

$$(1, -1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow h_1 - h_2 = 0 \Rightarrow h_1 = h_2.$$

Estudiamos el hessiano para decidir si hay extremos condicionados:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -2\cos(2x) \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2\cos(2y)$$

$$H_2L(x_k, y_k) = \begin{pmatrix} -2\cos(2x_k) & 0 \\ 0 & -2\cos(2y_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^k & 0 \\ 0 & -2\frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^k \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}(-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}(-1)^{k+1} \end{pmatrix}$$

Finalmente computamos el signo de $(h_1, h_1)H_2L(x_k, y_k)(h_1, h_1)^t$ para todo $h_1 > 0$:

$$(h_1, h_1)H_2L(x_k, y_k)(h_1, h_1)^t = (h_1, h_1)\begin{pmatrix} \sqrt{2}(-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}(-1)^{k+1} \end{pmatrix}(h_1, h_1)^t$$

$$= (h_1, h_1)\begin{pmatrix} h_1\sqrt{2}(-1)^{k+1} \\ h_1\sqrt{2}(-1)^{k+1} \end{pmatrix} = h_1^2\sqrt{2}(-1)^{k+1} + h_1^2\sqrt{2}(-1)^{k+1} =$$

$$2h_1^2\sqrt{2}(-1)^{k+1}$$

Así que si k es par entonces $2h_1^2\sqrt{2}(-1)^{k+1} < 0$ y tenemos un máximo condicionado en (x_k, y_k). Por el contrario si k es impar entonces $2h_1^2\sqrt{2}(-1)^{k+1} > 0$ y tenemos un mínimo condicionado en (x_k, y_k).

10. El teorema de la función implícita

Teorema. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, supongamos que $f_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R})$ $1 \leq i \leq m$, $k \in \mathbb{N}$, y sea $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) \in D$. Supongamos que*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \frac{\partial f_m}{\partial y_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces existe un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ tal que $(a_1, \ldots, a_n) \in U$, un subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^m$ tal que $(b_1, \ldots, b_m) \in V$ y una única función $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^k(U, V)$ con funciones coordenadas $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ tales que:

1. *$U \times V \subseteq D$.*
2. *$f_i(x_1, \ldots, x_n, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0$, $1 \leq i \leq m$. Además, si $(x_1, \ldots, x_n) \in U$ y si $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in U \times V$ verificando que $f(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$ entonces $\boldsymbol{\varphi}(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)$.*
3. *$\boldsymbol{\varphi}(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_m)$.*

Aunque este resultado no nos da una expresión de $\boldsymbol{\varphi}$, de las ecuaciones $f_i(x_1, \ldots, x_n, \boldsymbol{\varphi}(x_1, \ldots, x_n)) = 0$, $1 \leq i \leq m$, se pueden obtener las derivadas parciales de $\boldsymbol{\varphi}$ en $(a_1, \ldots, a_n)$ y así, se puede obtener una aproximación de $\boldsymbol{\varphi}$ en un entorno de $(a_1, \ldots, a_n)$ mediante un polinomio de Taylor. Éstos cálculos se verán en las clases de problemas.

Ejemplo

Comprobar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - 2xz = 0 \end{cases}$$

define a (x, y) como funciones implícitas de z en un abierto del punto $z = 0$ con los valores $(x, y) = (0, 0)$. Calcular las derivadas primeras y segundas de dicha función en el punto considerado.

Solución.

Definimos las funciones:

$$f_1(x, y, z) = x + y + z$$

$$f_2(x, y, z) = x - y - 2xz$$

Puesto que:

1. $f_1(0, 0, 0) = f_2(0, 0, 0) = 0$ y
2. $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0, 0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0, 0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0, 0, 0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(0, 0, 0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$

deducimos:

1. Existe un abierto U de $(0, 0)$ y V de 0 tales que $U \times V \subset \mathbb{R}^3$.
2. Existe
$$\begin{aligned} \varphi : V &\rightarrow U \\ z &\rightarrow (\varphi_1(z), \varphi_2(z)) \end{aligned}$$
tal que $f_i(\varphi_1(z), \varphi_2(z), z) = 0$ para todo $z \in V$ y para $i \in \{1, 2\}$.
Tanto φ_1 como φ_2 son funciones de clase C^∞.
3. $\varphi_1(0) = 0 = \varphi_2(0)$.

Ahora usamos que $\varphi_1(z) + \varphi_2(z) + z = 0$ y que $\varphi_1(z) - \varphi_2(z) - 2z\varphi_1(z) = 0$. Derivamos ambas expresiones y obtenemos: $\varphi_1'(z) + \varphi_2'(z) + 1 = 0$ y $\varphi_1'(z) - \varphi_2'(z) - 2\varphi_1(z) - 2z\varphi_1'(z) = 0$. Particularizando ahora ambas expresiones en $z = 0$ tenemos:

$$\varphi_1'(0) + \varphi_2'(0) + 1 = 0,$$

$$\varphi_1'(0) - \varphi_2'(0) = 0.$$

Resolviendo este sistema se tiene que $\varphi_1'(0) = \frac{-1}{2} = varphi_2'(0)$.

11. El teorema de la función inversa

Teorema (Función inversa). *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$, y $\mathbf{a} \in D$ tal que $|\mathrm{J}f(\mathbf{a})| \neq 0$. Entonces existen subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, U y V, tales que:*

1. $\mathbf{a} \in U$ *y* $f(\mathbf{a}) \in V$.
2. $f_{|U} : U \to V$ *es biyectiva y* $f^{-1} : V \to U$ *es de clase* $\mathcal{C}^k$
3. $\mathrm{J}f^{-1}(f(y)) = (\mathrm{J}f(x))^{-1}$ *para todo* $y \in V$ *y* $x \in U$ *tales que* $f(x) = y$.