En general, podemos definir una norma como $\|\cdot\| : E \longrightarrow [0, +\infty)$

(1) $\|\vec{u}\| \geq 0 \quad \forall \vec{u} \neq \vec{0}$

(2) $\|\alpha \vec{u}\| = |\alpha| \, \|\vec{u}\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

(3) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E$

(Minkowski ó desigualdad triangular)

¿Toda norma procede de un producto escalar?

Es decir, ¿dada una norma $\|\cdot\|$, existe un $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle} \; ?$$

La respuesta es **No** Contraejemplo: En $\mathbb{R}^2$

$\|(x,y)\|_\infty = \min\{|x|, |y|\}$ (verifica (1), (2) y (3))

(verlo vosotros)

$\vec{e}_1 = (1,0)$

$\vec{e}_2 = (0,1)$

$\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = (1,1)$

$\vec{e}_1 - \vec{e}_2 = (1,-1)$

$\|\vec{e}_1 + \vec{e}_2\|_\infty^2 = 1^2 = 1$

$\|\vec{e}_1 - \vec{e}_2\|_\infty^2 = (-1)^2 = 1$

$\Rightarrow 2(\|\vec{e}_1\|_\infty^2 + \|\vec{e}_2\|_\infty) = 0$

$\|\vec{e}_1 - \vec{e}_2\|_\infty^2 + \|\vec{e}_1 + \vec{e}_2\|_\infty = 2$

$\Rightarrow$ no verifica paralelogramo $\Rightarrow$ $\boxed{\|\cdot\|_\infty \neq \|\cdot\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle}}$

Si $\|\cdot\|$ es una norma y $\vec{v} \in E \Rightarrow$ si $\|\vec{v}\| = 1$

$\Rightarrow \vec{v}$ es normal.

$(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ esp. euclídeo, $\vec{u}, \vec{v} \in E$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$

$\vec{u}$ es ortogonal a $\vec{v}$

$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ son ortogonales si

$$\vec{u}_i \perp \vec{u}_j \quad \forall i \neq j$$

(ortogonales 2 a 2)

DEF:

$H \subset E$ subespacio vectorial, $H^\perp := \{\vec{v} \in E / \vec{v} \perp \vec{u} \ \forall \vec{u} \in H\}$

1) $H^\perp$ es un subespacio vectorial
2) $H \cap H^\perp = \{\vec{0}\}$
3) $E^\perp = \{\vec{0}\}$, $\{0^\perp\} = E$
4) $E = H \oplus H^\perp$
5) $\dim(E) = \dim(H) + \dim(H^\perp)$

Dem: ejercicio.

OBS: De los argumentos anteriores se desprende que $\forall \vec{u} \in E$

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \quad \text{con } \vec{u}_1 \in H \text{ de manera única} \quad \vec{u}_2 \in H^\perp$$

ya que $(E = H \oplus H^\perp)$. En este contexto, a $\vec{u}_1$ se le llama la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre H (es decir, la parte de $\vec{u}$ que se queda en H) y lo expresaremos como $P_H(\vec{u})$.

Así $\boxed{\vec{u} - P_H(\vec{u}) \in H^\perp}$

DEF: Dados $\vec{u} \in E$ y $H \subset E$ se define

$$d(\vec{u}, H) = \inf \{ \|\vec{u} - \vec{v}\| \,/\, \forall \vec{v} \in H \}$$

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \langle \vec{u} - \vec{u}, \vec{v} - \vec{u} \rangle =$$

$$= \langle \vec{v} - P_H(\vec{u}) + P_H(\vec{u}) - \vec{u}, \vec{v} - P_H(\vec{u}) + P_H(\vec{u}) - \vec{u} \rangle =$$

$$= \|\vec{v} - P_H(\vec{u})\|^2 + \|P_H(\vec{u}) - \vec{u}\|^2 +$$

$$+ 2 \langle \vec{v} - P_H(\vec{u}), P_H(\vec{u}) - \vec{u} \rangle \Rightarrow$$

$\vec{v} - P_H(\vec{u}) \in H$, $P_H(\vec{u}) - \vec{u} \in H^\perp$

$$\Rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ esto se minimiza si $\vec{v} = P_H(\vec{u})$

Así $\boxed{d(\vec{u}, H) = d(u, P_H(\vec{u}))}$ ← IMPORTANTE

Importante ejercicios de cálculo de la proyección ortogonal.

Método de Ortonormalización de Gram-Schmidt.

Sean $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ vectores en un espacio euclídeo formando base.

$$\vec{w}_1 := \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$$

$$\vec{v}_2 := \vec{u}_2 - \langle \vec{w}_1, \vec{u}_2 \rangle \vec{w}_1$$

$$\vec{v}_2 \perp \vec{w}_1$$

$$\vec{w}_2 := \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}$$

$$\vec{v}_3 := \vec{u}_3 - \langle \vec{w}_1, \vec{u}_3 \rangle \vec{w}_1 - \langle \vec{w}_2, \vec{u}_3 \rangle \vec{w}_2$$

$$\vec{w}_3 := \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|}$$

$$\vdots$$

$$\vec{v}_i := \vec{u}_i - \langle \vec{w}_1, \vec{u}_i \rangle \vec{w}_1 - \langle \vec{w}_2, \vec{u}_i \rangle \vec{w}_2 \dots - \langle \vec{w}_{i-1}, \vec{u}_i \rangle \vec{w}_{i-1}$$

$$\vec{w}_i := \frac{\vec{v}_i}{\|\vec{v}_i\|}$$

$\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ familia ortonormal.

$(\vec{w}_i \perp \vec{w}_j \ (i \neq j), \ \|\vec{w}_i\| = 1 \ \forall i = 1, \dots n)$.

Además $\langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \rangle = \langle \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n \rangle \Rightarrow$

$\uparrow$ Span

$\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ base ortonormal de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ //

Ejemplo: $S = \langle (1,0,0,1), (1,-1,2,1) \rangle$

con el producto escalar usual.

$$\vec{v} = (0,1,3,0)$$

Calcular $P_S(\vec{v})$.

- D -

Paso 1: Calculo $S^\perp$.

$(x,y,z,t) \in S^\perp$ si $(x,y,z,t) \perp (1,0,0,1)$ $\Rightarrow$

$(x,y,z,t) \perp (1,-1,2,1)$

$\langle (x,y,z,t), (1,0,0,1) \rangle = 0 \iff$

$\langle (x,y,z,t), (1,-1,2,1) \rangle = 0$

$x + z = 0 \Rightarrow \boxed{x = -z}$

$x - y + 2z + t = 0$

$\Downarrow$

$-z - y + 2z + t = 0 \iff -y + z + t = 0$

$\Rightarrow \boxed{y = z + t}$

Así $(x,y,z,t) \in S^\perp \iff (x,y,z,t) = (-z, z+t, z, t)$

$= z(-1,1,1,0) + t(0,1,0,1) \Rightarrow$

$$\boxed{S^\perp = \langle (-1,1,1,0), (0,1,0,1) \rangle}$$

Paso 2

$$E = S \oplus S^{\perp}$$

$$\vec{v} = \alpha(1,0,0,1) + \beta(1,-1,2,1) + \gamma(-1,1,1,0) + \xi(0,1,0,1)$$

$$P_S(\vec{v}) = \alpha(1,0,0,1) + \beta(1,-1,2,1)$$

$$(0,1,3,0) = \alpha(1,0,0,1) + \beta(1,-1,2,1) + \gamma(-1,1,1,0) + \xi(0,1,0,1)$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta - \gamma \\ 1 = -\beta + \gamma + \xi \\ 3 = 2\beta + \gamma \\ 0 = \alpha + \beta + \xi \end{cases}$$

sumando ⊛

$\boxed{\gamma = 3 - 2\beta}$

(#) restando

⊛ $\boxed{3 = \alpha + 2\beta}$

(#) $1 = -\alpha - 2\beta + \gamma = -\alpha - 2\beta + (3 - 2\beta) \Leftrightarrow$

$1 = -\alpha - 2\beta + 3 - 2\beta = -\alpha - 4\beta + 3 \Rightarrow$

$-2 = -\alpha - 4\beta \Rightarrow \boxed{2 = \alpha + 4\beta}$

$$\begin{aligned} 3 &= \alpha + 2\beta \\ 2 &= \alpha + 4\beta \\ \hline 1 &= -2\beta \Rightarrow \boxed{\beta = -1/2} \end{aligned}$$

restando

$\alpha = 2 - 4\beta = 2 - 4(-1/2) = 2 + 2 = 4$

$\boxed{\alpha = 4}$

Así $P_S(\vec{v}) = 4(1,0,0,1) +$

$+ (-1/2)(1,-1,2,1) =$

$= (4,0,0,4) + (-1/2, 1/2, -1, -1/2) =$

$= (4-1/2, 1/2, -1, 4-1/2) =$

$= (7/2, 1/2, -1, 7/2)$

Calcular $d(\vec{v}, S) =$

$= d(\vec{v}, P_S(\vec{v})) =$

$= \sqrt{(0-7/2)^2 + (1-1/2)^2 + (3+1)^2 + (0-7/2)^2} = \ldots$

Ejemplo:

En $\mathbb{R}^3$, consideremos el siguiente producto escalar

$$\langle (x,y,z), (x',y',z') \rangle = 2xx' + yy' + 3zz'$$

Sea $U = \{ (x,y,z) \mid x - y - z = 0 \}$.

Calcular $P_U(\vec{v})$ con $\vec{v} = (6, -6, -10)$.

- D -

$(x,y,z) \in U \iff x = y + z \Rightarrow (x,y,z) = (y+z, y, z) =$

$= y(1,1,0) + z(1,0,1) \Rightarrow$

$$\boxed{U = \langle (1,1,0), (1,0,1) \rangle}.$$

$(x,y,z) \perp (1,1,0) \iff$

$(x,y,z) \perp (1,0,1)$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

$y - 3z = 0 \Rightarrow y = 3z$

$2x = -y \Rightarrow x = -\frac{1}{2} y$

$x = -\frac{1}{2} \cdot 3z = -\frac{3}{2} z$

$(x,y,z) \in U \iff (x,y,z) = \left(-\frac{3}{2}z, 3z, z\right) =$

$= z\left(-\frac{3}{2}, 3, 1\right)$

$U = \langle \left(-\frac{3}{2}, 3, 1\right) \rangle = \langle (-3, 6, 2) \rangle$

$(6,-6,-10) = \alpha\cdot(-3,6,2) + \beta\cdot(1,1,0) + \gamma\cdot(1,0,1) \Rightarrow$

$$\begin{cases} 6 = -3\alpha + \beta + \gamma \\ -6 = 6\alpha + \beta \\ -10 = 2\alpha + \gamma \end{cases}$$

γ roster

$$\begin{cases} 6+10 = -5\alpha + \beta \\ -6 = 6\alpha + \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16 = -5\alpha + \beta \\ -6 = 6\alpha + \beta \end{cases}$$

$16 + 6 = -5\alpha - 6\alpha = -11\alpha \Rightarrow$

11

22

$\frac{22}{-11} = \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = -2}$

$\beta = -6 - 6\alpha = -6 + 12 = 6$

$\boxed{\beta = 6}$ ← não em necessário.

$P_V(\vec{v}) = 2\cdot(-3,6,2) = \boxed{(-6,12,4)}$

Problemas espacio Euclídeo :

(1) De los siguientes productos definidos sobre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, determinar cuáles de ellos son productos escalares:

(a) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

(b) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1^2 y_1^2 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

(c) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 x_2 + 4 x_2 y_2 + 4 x_3 y_3$

(d) $\langle (x_1, x_1, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$

(2) Dado el siguiente producto escalar sobre $\mathbb{R}^2$

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + 4 x_2 y_2$$

Calcular su matriz de Gram respecto a la base canónica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ y la base $B = \{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2\}$

(3) Sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ considéreuse los siguientes productos escalares dados por sus matrices de Gram respecto de la base canónica:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_1 = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_2 = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

(a) Calcular la norma de los vectores $(3, 2, 1)$ y $(-1, -8, 0)$ usando los productos escalares anteriores.

(b) Obtener las matrices de Gram de los productos

escalares $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ respecto de la base

$B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$.

④ Sea V un espacio vectorial sobre el cual se tiene definido un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de forma que para la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ se verifica:

$$\langle u_1, u_1 \rangle = 1 \qquad \langle u_1, u_2 \rangle = 1 \qquad \langle u_1, u_3 \rangle = 0$$

$$\langle u_2, u_2 \rangle = 3 \qquad \langle u_2, u_3 \rangle = 1 \qquad \langle u_3, u_3 \rangle = 1$$

Se pide calcular:

(a) El producto escalar de los vectores $u = u_1 + 3u_2 - u_3$ y $v = u_1 - u_2 + u_3$, así como el ángulo que forman.

(b) Una base ortonormal a partir de B.

(c) El valor de α para que el vector $u = \alpha u_1 + u_2$ sea unitario.

(d) El valor de α para que los vectores $u = \alpha u_1 + u_2$ y $v = \alpha u_1 - u_2 - u_3$ sean ortogonales.