En general, podemos definir una norma como $\|\cdot\| : E \longrightarrow [0, +\infty)$

(1) $\|\vec{u}\| > 0 \quad \forall \vec{u} \neq \vec{0}$

(2) $\|\alpha \vec{u}\| = |\alpha| \, \|\vec{u}\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(3) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E$

(Minkowski ó desigualdad triangular)

¿Toda norma procede de un producto escalar? Es decir, ¿dada una norma $\|\cdot\|$, existe un $<\cdot,\cdot>$ tal que

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{<\cdot,\cdot>} \ ?$$

La respuesta es <u>NO</u>. <u>Contraejemplo</u>: En $\mathbb{R}^2$

$$\|(x, y)\|_\infty = \min\{|x|, |y|\}$$ (verifica (1), (2) y (3))

(verlo vosotros)

$\vec{e}_1 = (1, 0)$

$\vec{e}_2 = (0, 1)$

$\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = (1, 1)$

$\vec{e}_1 - \vec{e}_2 = (1, -1)$

$$\left.\begin{array}{l} \|\vec{e}_1 + \vec{e}_2\|_\infty^2 = 1^2 = 1 \\ \|\vec{e}_1 - \vec{e}_2\|_\infty^2 = (1)^2 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2(\underbrace{\|\vec{e}_1\|_\infty^2}_{0} + \underbrace{\|\vec{e}_2\|_\infty^2}_{0}) = 0 \neq \|\vec{e}_1 - \vec{e}_2\|_\infty^2 + \|\vec{e}_1 + \vec{e}_2\|_\infty = 2$$

$\Longrightarrow$ no verifica paralelogramo $\Longrightarrow \boxed{\|\cdot\|_\infty \neq \|\cdot\|_{<\cdot,\cdot>}}$