Espacio Vectorial Euclídeo.

DEF: Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los nºs reales. Una aplicación $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que a cada par de vectores $u, v \in V$ les asocia un nº real $\langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$, se dice que es un producto escalar en V si verifica las siguientes propiedades:

a) Conmutatividad: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \ \forall u, v \in V$

b) Bilinealidad: $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$

(sólo vale en la 1ª coor. dado que como es conmutativa da igual)

c) Positividad: $\langle u, u \rangle > 0 \ \forall u \neq 0$.

En ocasiones, especialmente en los libros de física el producto escalar se representa por $u \cdot v$.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^n$ la aplicación:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$
$\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ es un producto escalar que se

llama producto escalar canónico en $\mathbb{R}^n$.

OBS: De los axiomas de la def de producto escalar

$$\langle u, \vec{0} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{0}+\vec{0} \rangle =$$
$$= \langle \vec{u}, \vec{0} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{0} \rangle \Longrightarrow$$

$$\boxed{\langle u, \vec{0} \rangle = 0}.$$

Matriz de Gram:

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y sea $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de V. Dados dos vectores $u, w \in V$ con coordenadas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ respectivamente en la base B, se tiene que:

$$\langle u, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle u_i, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle w, u_i \rangle =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \langle u_i, u_j \rangle \quad \text{(usando la bilinealidad)}$$

Por tanto, conociendo cómo actua el producto escalar sobre los elementos de una base de V es posible calcular el producto escalar de dos vectores cuales quiera.

La matriz $G \in M_n(\mathbb{R})$ construida de forma que el elemento que ocupa la posición i, j es $g_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$ recibe el nombre de <u>matriz de Gram</u> del producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en la base B.

Escribiendo la relación anterior en forma matricial se tiene que

$$\langle u, w \rangle = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \underset{n \times n}{G} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

con G la matriz de Gram que satisface las siguientes propiedades:

1) G es simétrica (coincide con su traspuesta)
2) G posee todos sus valores <u>propios positivos</u>
3) G es invertible ($\Rightarrow |G| \neq 0$)

<u>OBS</u>: $\boxed{G \text{ depende de } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ y de la base}}$

Para obtener la relación entre las matrices de Gram consideremos $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ otra base de V. Si $\alpha_1', \dots, \alpha_n'$ y $\beta_1', \dots, \beta_n'$ son las coordenadas de u y w respectivamente en B'

Entonces $\underset{\text{base } B}{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}} = M_{B'B} \underset{\text{base } B'}{\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix}} \qquad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = M_{B'B} \begin{pmatrix} \beta_1' \\ \vdots \\ \beta_n' \end{pmatrix}$

coordenadas

$$\langle u, w \rangle = (\alpha_1' \dots \alpha_n') M_{B'B}^t \, G \cdot M_{B'B} \begin{pmatrix} \beta_1' \\ \vdots \\ \beta_n' \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{G' = M_{B'B}^t \, G \cdot M_{B'B}}$$

Espacio Vectorial Euclídeo: (pág 98)

DEF: Se llama <u>espacio vectorial euclídeo</u> al par $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ formado por un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E y un producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sobre E.

DEF: Sea $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo. Se llama <u>norma asociada al producto escalar</u> del espacio a la aplicación $\|\cdot\|: E \to [0, +\infty)$ definida por:

$$\boxed{\|u\| = +\sqrt{\langle u, u\rangle}\,,\quad u \in E}$$

De los axiomas de producto escalar son inmediatas las siguientes propiedades de las normas asociadas:

- $\|u\| = 0 \iff u = 0$
- $\|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|$, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u \in E$
- $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

La tercera propiedad se llama <u>regla del paralelogramo</u>.

Las normas asociadas a productos escalares verifican además dos importantes propiedades: la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la de Minkowski

<u>Desigualdad de Cauchy-Schwarz.</u> Dados $u, v \in E$ se tiene la desigualdad

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

que es estricta si u y v son linealmente independientes

<u>Dem. ejercicio entregar</u>

<u>Desigualdad de Minkowski o triangular.</u>

Dados $u, v \in E$, se verifica la relación:

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Distancias entre vectores:

- Sea $(E, <;>)$ un espacio vectorial euclídeo. La norma de un vector, $\|u\|$, nos informa de la "longitud" de dicho vector. $u, v \in E$ definimos su distancia como

$$d(u,v) = \|u-v\|.$$