1.1. Primitivas inmediatas

Sólo sabiendo derivar podemos conocer la primitiva de una amplia variedad de funciones, el conocimiento de dichas primitivas (elementales) junto con algunas técnicas serán suficientes para poder calcular primitivas de una amplia variedad de funciones.

1. $\int a^x \ \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\log a} + K, \qquad a > 0, a \neq 1, I = (-\infty, +\infty),$
2. $\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + K, \qquad I = (-\infty, +\infty)$
3. $\int x^r \,\mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + K, \qquad r \neq -1, I = (0, +\infty),$
4. $\int x^{-1} \,\mathrm{d}x = \log x + K, \qquad I = (0, +\infty),$
5. $\int \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x = -\cos x + K, \qquad I = (-\infty, +\infty),$
6. $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + K, \qquad I = (-\infty, +\infty),$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \operatorname{arcsen} x + K = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\cos x + K, \qquad I = (-1, +1),$
8. $\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \arctan x + K, \qquad I = (-\infty, +\infty),$
9. $\int (1 + \tan^2 x) \,\mathrm{d}x = \int \sec^{-2} x \,\mathrm{d}x = \tan x + K, \qquad I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),$
10. $\int \operatorname{cosec}^2 x \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotan} x + K, \qquad I = (0, \pi),$

A continuación se relacionan algunas propiedades útiles para calcular primitivas de otras funciones partiendo de las anteriores.

1.2. Utilizar la regla de la cadena para las primitivas

Proposición. *Sean f y g funciones derivables definidas en el intervalo (a, b). Entonces se verifica la fórmula:*

$$\int f'(g(x))g'(x)\ \mathrm{d}x = f \circ g(x) + K.$$

Esta proposición permite ampliar la relación de primitivas dadas anteriormente. En efecto, para cualquier función derivable f se tienen las siguientes primitivas:

1. $\int a^{f(x)} f'(x)\ \ \mathrm{d}x = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + K, \qquad a > 0, a \neq 1,$
2. $\int e^{f(x)} f'(x)\ \mathrm{d}x = e^{f(x)} + K,$
3. $\int f(x)^r f'(x)\ \mathrm{d}x = \frac{f(x)^{r+1}}{r+1} + K, \qquad r \neq -1,$
4. $\int f(x)^{-1} f'(x)\ \mathrm{d}x = \log f(x) + K,$
5. $\int \operatorname{sen} f(x) f'(x)\ \mathrm{d}x = -\cos f(x) + K,$
6. $\int \cos f(x) f'(x)\ \mathrm{d}x = \operatorname{sen} f(x) + K,$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} f'(x)\ \mathrm{d}x = \operatorname{arcsen} f(x) + K = \frac{\pi}{2} - \arccos f(x) + K,$
8. $\int \frac{1}{1+f(x)^2} f'(x)\ \mathrm{d}x = \arctan f(x) + K,$
9. $\int (1 + \tan^2 f(x)) f'(x)\ \mathrm{d}x = \int \sec^{-2} f(x)\ \mathrm{d}x = \tan f(x) + K,$

10. $\int f'(x)\,\mathrm{cosec}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{cotan}\, f(x) + K,$

Ejemplo. *La integral de la función tangente se encuentra en la situación de la proposición anterior. En efecto:*

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\log|\cos x| \text{ \textit{en todo intervalo tal que} } \cos x \neq 0.$$

1.3. Integración de sumas y por partes

Proposición. *Dadas funciones* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *y un número real* λ, *se verifica:*

- $\int (f(x) + g(x))\, \mathrm{d}x = \int f(x)\, \mathrm{d}x + \int g(x)\, \mathrm{d}x$,
- $\int \lambda f(x)\, \mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\, \mathrm{d}x$.

Ejemplo (Integración de polinomios).

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_p x^p)\, \mathrm{d}x = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots a_p \frac{x^{p+1}}{p+1} + K.$$

Proposición (Regla de derivación por partes). *Dadas funciones* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *derivables, se verifica:*

$$\int f(x) g'(x)\, \mathrm{d}x = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Ejemplo.

$\int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x = \int \operatorname{sen} x(-\cos x)' \, \mathrm{d}x = -\operatorname{sen} x \cos x + \int (\operatorname{sen} x)' \cos x \, \mathrm{d}x =$
$-\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x,$

de donde:

$\int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x = -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, \mathrm{d}x.$

Por lo tanto:

$2 \int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x = -\operatorname{sen} x \cos x + x$ *y*

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x = -\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} + \frac{x}{2}.}$$

Ejercicio.

Obtener una fórmula de recurrencia para calcular la primitiva $\int \frac{1}{(1+x^r)^r} \, \mathrm{d}x$.

2. Integración por cambio de variable

Supongamos que queremos encontrar la primitiva de una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $\int f(x)\, \mathrm{d}x$. En este apartado se trata de ver cómo simplificar dicho cálculo a través de un cambio de variable. Supongamos que $t(x)$ denota una función invertible y derivable y calculemos su derivada $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = t'(x)$, que *formalmente* podemos escribir como $\mathrm{d}t = t'(x)\, \mathrm{d}x$.

A través de unos cálculos justificativos que el alumno puede seguir en el Libro de J. A. Fernández Viña (Análisis matemático, tomo 1, página 254) se puede obtener la igualdad:

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = \int f(t) \frac{1}{t'(x)}\, \mathrm{d}t,$$

donde en el segundo miembro de la igualdad una ver hecha la primitiva hay que substituir t por $t(x)$.

Ejemplo. *Vamos a calcular mediante un cambio de variable la primitiva* $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$, *consideraremos el cambio* $t = \sqrt{x}$.

Efectuando el cambio, tendremos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2t}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = 2\arctan t = 2\arctan\sqrt{x}.$$

3. Primitivas de fracciones racionales

El método para calcular primitivas de fracciones racionales se basa en la descomposición de una fracción racional en fracciones simples. Recordemos que una *fracción racional* en la variable x no es más que un cociente de polinomios en la variable x. En cambio, una *fracción racional simple* o una *fracción simple* es una fracción racional de una de las dos formas siguientes:

1. una fracción racional cuyo numerador es una constante y cuyo denominador es un polinomio de grado 1,
2. una fracción racional cuyo numerador es un polinomio de grado 1 y cuyo denominador es un polinomio de grado 2 sin raíces reales.

Teorema. *Toda fracción racional $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ se descompone como:*

$$F(x) = r(x) + \sum_{k=1}^{\alpha_1} \frac{A_k}{(x-a_1)^k} + \cdots + + \sum_{k=1}^{\alpha_m} \frac{A_k}{(x-a_n)^k},$$

donde los a_i son las raíces de $Q(x) = 0$ y α_i son las multiplicidades. Finalmente los A_i son números reales determinados y $r(x)$ un polinomio.

Teorema. *Toda fracción racional* $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *se descompone como:*

$$F(x) = r(x) + \sum_{k=1}^{\alpha_1} \frac{A_k^1}{(x-a_1)^k} + \cdots + + \sum_{k=1}^{\alpha_m} \frac{A_k^n}{(x-a_n)^k} +$$

$$\sum_{k=1}^{\beta_1} \frac{B_k^1 x + C_k^1}{\{[x-(b_1+c_1 i)][x-(b_1-c_1 i)]\}^k}$$

$$+ \cdots + \sum_{k=1}^{\beta_l} \frac{B_k^l x + C_k^l}{\{[x-(b_l+c_l i)][x-(b_l-c_l i)]\}^k},$$

donde los a_i *son las raíces reales de* $Q(x) = 0$ *y* α_i *son las multiplicidades de dichas raíces, los* $b_j + c_j i$ *son las raíces complejas de* $Q(x) = 0$ *y* β_j *son las multiplicidades de dichas raíces. Finalmente los* A_i, B_i *y* C_i *son números reales determinados y* $r(x)$ *un polinomio.*

Apoyándose en el teorema anterior se puede deducir un método para hacer primitivas de fracciones racionales. El método consistirá en obtener la descomposición anterior y calcular primitivas sumando a sumando.

4. Primitivas de expresiones que contienen $\frac{ax+b}{cx+d}$

Sea F una fracción racional del tipo:

$$F\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right),$$

de forma que n es el mínimo común múltiplo de los números $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Entonces el cambio de variable

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d},$$

transforma la primitiva $\int F \, \mathrm{d}x$ en la primitiva de una fracción racional en la variable t.

Ejercicio.

Resolver las primitivas[1]:

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \, \mathrm{d}x$,
2. $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}} \, \mathrm{d}x$,
3. $\int \frac{1}{(1+x)^2} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2} \, \mathrm{d}x$.

[1]Indicación: los cambios necesarios serán tomar t igual a $\sqrt[6]{x}$, $\sqrt{1-x}$ y $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

5. Las funciones hiperbólicas

Recordamos que las funciones seno y coseno se introducen utilizando la función exponencial compleja de la forma que sigue:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}.$$

Si en vez de considerar la exponencial compleja consideramos la exponencial real obtendremos las *funciones coseno y seno hiperbólicos* definidas concretamente como siguen:

$$\operatorname{Ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{Sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2},$$

es fácil ver que ambas funciones son continuas y están definidas sobre todo $\mathbb{R}$. Además, la función coseno hiperbólico es siempre mayor que cero ya que la exponencial siempre es mayor que cero. Por lo tanto podemos dividir la función seno hiperbólico por la función coseno hiperbólico y obtenemos la función tangente hiperbólica, continua y definida sobre todo $\mathbb{R}$:

$$\operatorname{Th} x = \frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x}.$$

A partir de estas definiciones se pueden obtener sin dificultad las propiedades básicas de las funciones hiperbólicas, propiedades análogas (que no iguales) a las de las funciones trigonométricas:

Teorema.

$$\mathrm{Ch}\,(-x) = \mathrm{Ch}\,x \qquad \cos\,(-x) = \cos x$$

$$\mathrm{Sh}\,(-x) = -\mathrm{Sh}\,x \qquad \mathrm{sen}\,(-x) = -\mathrm{sen}\,x$$

$$\mathrm{Th}\,(-x) = -\mathrm{Th}\,(x) \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\mathrm{Ch}^{\,2}x - \mathrm{Sh}^{\,2}x = 1 \qquad \cos^{\,2}x + \mathrm{sen}^{\,2}x = 1$$

$$1 - \mathrm{Th}^{\,2}x = \frac{1}{\mathrm{Ch}^{\,2}} \qquad 1 + tan^2x = \frac{1}{\cos^{\,2}x}$$

$$\mathrm{Ch}\,(x+y) = \mathrm{Ch}\,x\mathrm{Ch}\,y + \mathrm{Sh}\,x\mathrm{Sh}\,y \qquad \cos\,(x+y) = \cos x\cos y - \mathrm{sen}\,x\mathrm{sen}\,y$$

$$\mathrm{Ch}\,(2x) = \mathrm{Ch}^{\,2}x + \mathrm{Sh}^{\,2}x \qquad \cos\,(2x) = \cos^{\,2}x - \mathrm{sen}^{\,2}x$$

$$\mathrm{Ch}\,(x-y) = \mathrm{Ch}\,x\mathrm{Ch}\,y - \mathrm{Sh}\,x\mathrm{Sh}\,y \qquad \cos\,(x-y) = \cos x\cos y + \mathrm{sen}\,x\mathrm{sen}\,y$$

$$\mathrm{Sh}\,(x+y) = \mathrm{Sh}\,x\mathrm{Ch}\,y + \mathrm{Ch}\,x\mathrm{Sh}\,y \qquad \mathrm{sen}\,(x+y) = \mathrm{sen}\,x\cos y + \cos x\mathrm{sen}\,y$$

$$\mathrm{Sh}\,(2x) = 2\mathrm{Sh}\,x\mathrm{Ch}\,x \qquad \mathrm{sen}\,(2x) = 2\mathrm{sen}\,x\cos x$$

$$\mathrm{Sh}\,(x-y) = \mathrm{Sh}\,x\mathrm{Ch}\,y - \mathrm{Ch}\,x\mathrm{Sh}\,y \qquad \mathrm{sen}\,(x-y) = \mathrm{sen}\,x\cos y - \cos x\mathrm{sen}\,y$$

$$\mathrm{Th}\,(x+y) = \frac{\mathrm{Th}\,x + \mathrm{Th}\,y}{1 + \mathrm{Th}\,x\mathrm{Th}\,y} \qquad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\mathrm{Th}\,(x-y) = \frac{\mathrm{Th}\,x - \mathrm{Th}\,y}{1 - \mathrm{Th}\,x\mathrm{Th}\,y} \qquad \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Además de estas propiedades que dependen únicamente de la definición de las funciones hiperbólicas, por la propia definición estas funciones son derivables, viniendo recogidas sus propiedades en lo que sigue:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Sh}'x &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{Ch}\, x,\\
\mathrm{Ch}'x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{Sh}\, x,\\
\mathrm{Th}'x = \left(\frac{\mathrm{Sh}\, x}{\mathrm{Ch}\, x}\right)' &= \frac{\mathrm{Ch}\, x \mathrm{Ch}\, x - \mathrm{Sh}\, x \mathrm{Sh}\, x}{\mathrm{Ch}^2 x} = \frac{1}{\mathrm{Ch}^2 x}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Resumiendo:

$$\boxed{\mathrm{Sh}'x = \mathrm{Ch}\, x, \quad \mathrm{Ch}'x = \mathrm{Sh}\, x, \quad \mathrm{Th}'x = \tfrac{1}{\mathrm{Ch}^2 x}.}$$

Ahora que conocemos las derivadas de las funciones hiperbólicas se puede ver fácilmente que $\mathrm{Sh}'x$ y $\mathrm{Th}'x$ son números reales estrictamente mayores que cero, luego ambas funciones son estrictamente crecientes y por lo tanto aplicaciones inyectivas. Estudiando los límites cuando x tiende a $\pm\infty$ conoceremos entre qué intervalos ambas funciones son biyectivas.

Observación.

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Sh}\, x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{Sh}\, x = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Th}\, x = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{Th}\, x = -1.$$

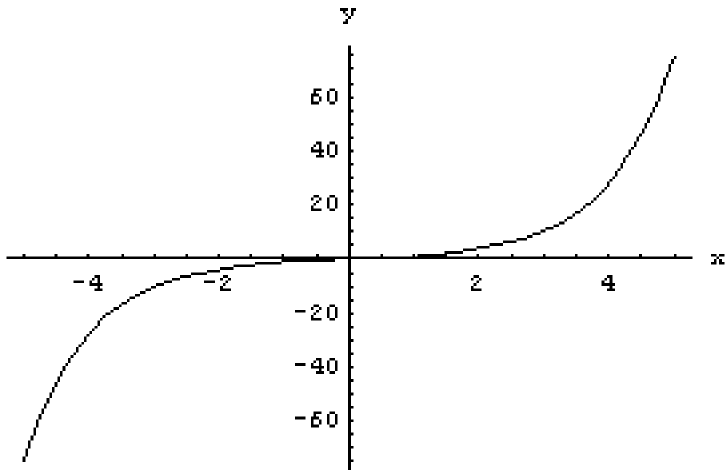

Figura 1: Función seno hiperbólico

Teorema. *Las funciones:*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Sh} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \to & \mathrm{Sh}\, x \end{array} \quad y \quad \begin{array}{rcl} \mathrm{Th} : \mathbb{R} & \longrightarrow & (-1, 1) \\ x & \to & \mathrm{Th}\, x \end{array}$$

son biyectivas.

Sin embargo, la función coseno hiperbólico no es una aplicación biyectiva cuando la consideramos definida sobre todo $\mathbb{R}$, es más, mediante el uso de las derivadas de la función Ch se puede ver que dicha función tiene un mínimo en $x = 0$.

5.1. Los argumentos hiperbólicos de las funciones hiperbólicas

Hemos visto ya que las funciones seno y tangente hiperbólicas son invertibles, con lo cual nos podemos plantear la búsqueda de sus funciones

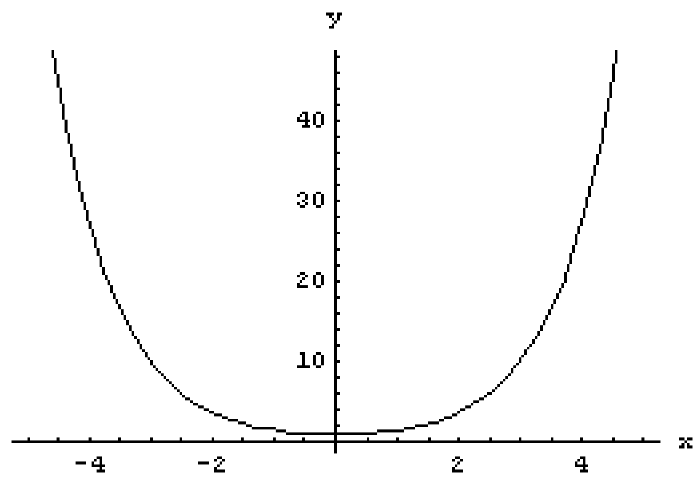

Figura 2: Función coseno hiperbólico

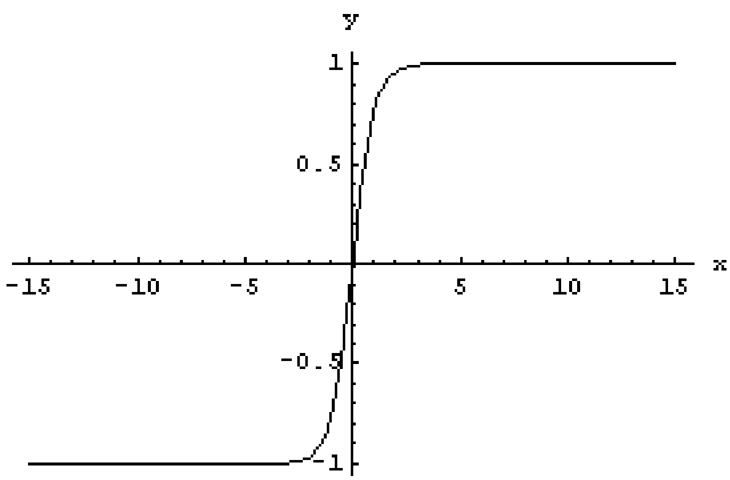

Figura 3: Función tangente hiperbólica

inversas, éstas funciones se llamarán *argumento del seno hiperbólico* y *argumento de la tangente hiperbólica*.

Aunque la función coseno hiperbólico no sea una biyección, si la consideramos definida sólo sobre la semirrecta positiva o negativa, sí que es un biyección y tiene sentido buscar el *argumento del coseno hiperbólico*.

Argumento del seno hiperbólico

Partiendo de la igualdad $y = \operatorname{Sh} x$, encontrar el argumento del seno hiperbólico se trata de despejar x en función de y. Para ello seguimos los siguientes pasos:

$$\operatorname{Sh} x = y \Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Rightarrow e^x - e^{-x} = 2y.$$

Ahora hacemos el cambio de variable $z = e^x$, de donde $\frac{1}{z} = e^{-x}$:

$$\operatorname{Sh} x = e^x - e^{-x} = 2y \Rightarrow z - \frac{1}{z} = 2y \Rightarrow z^2 - 2yz - 1 = 0 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow z = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{1 + y^2}.$$

Ahora hay que observar que el signo menos anterior no tiene sentido ya que para él, z sería negativo, sin embargo z debe ser positivo por ser igual a e^x. Entonces:

$$\operatorname{ArgSh} y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

$\boxed{\text{Argumento del coseno hiperbólico}}$

Partiendo ahora de la igualdad $y = \operatorname{Ch} x$, encontrar el argumento del coseno hiperbólico se trata de despejar x en función de y. Para ello procedemos como antes:

$$\operatorname{Ch} x = y \Rightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \Rightarrow e^x + e^{-x} = 2y.$$

Ahora hacemos el cambio de variable $z = e^x$, de donde $\frac{1}{z} = e^{-x}$:

$$\operatorname{Ch} x = e^x + e^{-x} = 2y \Rightarrow z + \frac{1}{z} = 2y \Rightarrow z^2 - 2yz + 1 = 0 \qquad (3)$$
$$\Rightarrow z = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

En este caso el signo menos sí tiene sentido porque no hace que z sea negativo. Entonces:

$$\operatorname{ArgCh} y = \log(y \pm \sqrt{y^2 - 1}).$$

Argumento de la tangente hiperbólica

Observemos para empezar que la tangente hiperbólica sólo estará definida en el intervalo $(-1, 1)$, ya que la tangente hiperbólica sólo toma valores en dicho intervalo. Partimos de la igualdad $y = \operatorname{Th} x$ y hacemos en los cálculo que siguen el cambio de variable $z = e^x$:

$$\operatorname{Th} x = y \Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \Rightarrow z - \frac{1}{z} = (z + \frac{1}{z})y \Rightarrow \frac{z^2 - 1}{z} = \frac{z^2 + 1}{z} y$$
$$\Rightarrow (y - 1)z^2 = -1 - y \Rightarrow z^2 = \frac{1 + y}{1 - y} \Rightarrow x = \log \sqrt{\frac{1 + y}{1 - y}}.$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{ArgTh} y = \log \sqrt{\frac{1 + y}{1 - y}}.$$

5.2. Las derivadas de las funciones hiperbólicas y sus análogas trigonométricas

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sh}'x &= \operatorname{Ch} x, & \operatorname{sen}' x &= \cos x \\
\operatorname{Ch}'x &= \operatorname{Sh} x, & \cos' x &= -\operatorname{sen} x \\
\operatorname{Th}'x &= \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x}, & \tan' x &= \frac{1}{\cos^2} \\
\operatorname{ArgSh}'x &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \operatorname{arcsen}' x &= \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}} \\
\operatorname{ArgCh}'x &= \frac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}}, & \operatorname{arc}\cos' x &= \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}} \\
\operatorname{ArgTh}'x &= \frac{1}{1-x^2}, & \arctan' x &= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned} \tag{4}$$

6. Primitivas de expresiones que contienen $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$

En esta sección vamos a analizar cómo obtener primitivas del estilo $\int f(\cos x, \operatorname{sen} x)\ \mathrm{d}x$, donde f es una fracción racional y el intervalo donde queremos calcular la primitiva será $(-\pi, \pi)$.

6.1. El cambio de variable $x = 2 \arctan t$

El cambio de variable $x = 2 \arctan t$, es decir, $t = \tan \frac{x}{2}$, pone en correspondencia el intervalo $(-\pi, \pi)$ con toda la recta real. Al realizar este cambio será de utilidad tener en cuenta las relaciones trigonométricas usuales que dan las siguientes igualdades:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}. \tag{5}$$

Al realizar este cambio de variable y tener en cuenta las relaciones anteriores convertiremos la primitiva inicial en la de una fracción racional en la variable t:

$$\int f\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Aunque este cambio nos asegura el éxito en la resolución de primitivas, otros pueden conllevar una resolución más simple. Veámoslo.

6.2. El cambio $t = \operatorname{sen} x$

Si la fracción racional $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es del estilo $f_1(\operatorname{sen} x)\cos x$ entonces el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$ nos lleva a una resolución más sencilla. Conviene notar que estaremos ante este caso cuando al dividir

$f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ por $\cos x$ nos quedan sólo potencias pares de $\cos x$, pues basta poner $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$.

6.3. El cambio $t = \cos x$

Si la fracción racional $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es del estilo $f_1(\cos x)\operatorname{sen} x$ entonces el cambio de variable $t = \cos x$ nos lleva a una resolución más sencilla que utilizando el primer cambio de la tangente del ángulo mitad. Conviene notar que estaremos ante este caso cuando al dividir $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ por $\operatorname{sen} x$ nos quedan sólo potencias pares de $\operatorname{sen} x$, pues basta poner $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.

6.4. El cambio $t = \tan x$

En el caso en el que la fracción racional $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ sea del estilo $f_1(\tan x)$ entonces se hace el cambio $\tan x = t$ y la primitiva $\int f_1(\tan x)\, \mathrm{d}x$ queda como

$$\int \frac{f_1(\tan x)}{1 + \tan^2 x}(1 + \tan^2 x)\, \mathrm{d}x = \int \frac{f_1(t)}{1 + t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Estaremos en este caso si al sustituir $\operatorname{sen} x$ por $\cos x \tan x$ en la expresión $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ nos quedan sólo cosenos elevados a exponentes pares, pues basta poner entonces $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$.

6.5. Casos particulares

Un caso interesante de las primitivas de funciones trigonométricas son las de la forma

$$\int \cos^n x \operatorname{sen}^m x \, \mathrm{d}x,$$

donde los exponentes m y n son naturales. Utilizando las fórmulas de trigonometría puede expresarse $\cos^n x$ como una suma en la que intervienen cosenos múltiplos de x, y $\operatorname{sen}^m x$ como una suma en la que intervienen cosenos y senos múltiplos de x. Al efectuar la multiplicación de dichas sumas aparecerán productos de la forma $\operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta x)$ y productos de la forma $\cos(\alpha x)\operatorname{sen}(\beta x)$. Para calcular las integrales de estos productos se descomponen en sumas utilizando las fórmulas:

$$2\operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta x) = \operatorname{sen}[(\alpha+\beta)x] + \operatorname{sen}[(\alpha-\beta)x] \tag{6}$$

$$2\cos(\alpha x)\cos(\beta x) = \cos[(\alpha+\beta)x] + \cos[(\alpha-\beta)x] \tag{7}$$

Por otro lado, otra situación interesante es aquella en la que disponemos de una fracción racional en las variables $\cos(r_1 x), \cos(r_2 x), \ldots, \cos(r_n x)$, $\operatorname{sen}(s_1 x), \operatorname{sen}(s_2 x), \ldots, \operatorname{sen}(s_m x)$, siendo los números $r_1, r_2, \ldots, r_n$, $s_1, s_2, \ldots, s_m$ son racionales. Tomemos el mínimo común múltiplo de los denominadores de dichos números, p, y hagamos el cambio $x = pt$. Con lo que obtendremos una primitiva donde intervienen cosenos y senos múltiplos enteros de t. Finalmente, cada una de las funciones anteriores se puede expresar como un polinomio de $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$, con lo que hemos pasado al primer caso de este apartado.

Ejercicio.

Resuelve:

1. $\int \frac{1}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x$ usando el cambio $\tan(x/2) = t$,
2. $\int \frac{1+\cos^2 x}{cosx(1+\operatorname{sen}^2 x)}\,\mathrm{d}x$ usando el cambio $\operatorname{sen} x = t$,
3. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ usando el cambio $\tan x = t$.

7. Primitivas de expresiones que contienen $\sqrt{ax^2+2bx+c}$

En esta sección se estudian las primitivas del estilo $\int f(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})\,\mathrm{d}x$, donde f es una fracción racional y a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

En estas primitivas siempre hay que tener en cuenta la identidad:

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a},$$

lo cual sugiere hacer el cambio de variable $t = x+b/a$ transformándose la primitiva de partida en:

$$\int f(t-b/a, \sqrt{at^2+d})\,\mathrm{d}t.$$

En el caso que d sea cero, a debe ser positivo y la primitiva toma la forma $\int f(t - b/a, \sqrt{a}t)\, \mathrm{d}t$, que no plantea dificultades. Por lo tanto consideraremos que estamos en el caso $d \neq 0$ y veremos la forma de proceder distinguiendo tres casos.

1. $d < 0$ y $a > 0$. En este caso hacemos el cambio de variable $\sqrt{\frac{a}{-d}}t = u$ y obtenemos la nueva primitiva
$$\int f(\sqrt{\frac{-d}{a}}u - \frac{b}{a}, \sqrt{-d}\sqrt{u^2-1})\, \mathrm{d}u = \int f_1(u, \sqrt{u^2-1})\, \mathrm{d}u,$$
donde f_1 es una fracción racional. Esta última integral se resuelve fácilmente haciendo el cambio $u = \operatorname{Ch} v$.

2. $d > 0$ y $a > 0$. En este caso hacemos el cambio de variable $\sqrt{\frac{-a}{d}}t = u$ y obtenemos la nueva primitiva
$$\int f(\sqrt{\frac{d}{-a}}u - \frac{b}{a}, \sqrt{d}\sqrt{1-u^2})\, \mathrm{d}u = \int f_2(u, \sqrt{1-u^2})\, \mathrm{d}u,$$
donde f_2 es una fracción racional. Esta última integral se resuelve fácilmente haciendo el cambio $u = \operatorname{sen} v$.

3. $d > 0$ y $a > 0$. En este último caso se hace el cambio $\sqrt{\frac{a}{d}}t = u$ y obtenemos la nueva primitiva
$$\int f(\sqrt{\frac{d}{a}}u - \frac{b}{a}, \sqrt{d}\sqrt{u^2+1})\, \mathrm{d}u = \int f_1(u, \sqrt{u^2+1})\, \mathrm{d}u,$$
donde f_1 es una fracción racional. Esta última integral se resuelve fácilmente haciendo el cambio $u = \operatorname{Sh} v$.

6

Cálculo de primitivas

Competencias

- Saber aplicar las técnicas para el cálculo de integrales racionales.
- Saber aplicar las técnicas para el cálculo de integrales racionales trigonométricas.
- Saber aplicar las técnicas para el cálculo de integrales trascendentes sencillas.
- Conocer y saber aplicar las técnicas para el cálculo de algunas integrales irracionales frecuentes..
- Saber usar MAXIMA para calcular integrales.

CONTENIDOS

Este capítulo está dedicado a describir técnicas para el cálculo de primitivas. Dada una función f se llama primitiva de f a cualquier función g derivable con la propiedad de que $g' = f$. No siempre existe una tal función, como ya hemos señalado en el capítulo 5. Pero en este capítulo adoptaremos una filosofía más operacional que analítica y la existencia de primitivas estará siempre asegurada para las funciones que consideraremos aquí puesto que nos limitaremos a funciones continuas o con un número finito de puntos de discontinuidad.

Una primera observación evidente es que si g es una primitiva de f también lo es $g+C$ siendo C una constante arbitraria. De hecho todas las primitivas de f, en un mismo intervalo, son de dicha forma.

La segunda observación, también clara, es que el cálculo de primitivas está directamente relacionado con el cálculo de derivadas, siendo necesario conocer las reglas que regulan el cálculo de derivadas para poder obtener reglas para el cálculo de antiderivadas. En el capítulo 4 hemos demostrado las reglas del cálculo de derivadas, que recogemos de forma sintética a continuación.

(1) $(af)' = af'$ (siendo a una constante);

(2) $(f+g)' = f' + g'$ (derivada de la suma);

(3) $(fg)' = f'g + fg'$ (derivada del producto);

(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ (derivada del cociente);

(5) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ (derivada de la composición de funciones);

(6) Derivadas de las funciones elementales:

Función	Derivada	Función	Derivada	Función	Derivada
C	0	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\operatorname{arcsen} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^n	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\log x$	$\dfrac{1}{x}$	$\operatorname{cotg} x$	$\dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$		

Como ya hemos convenido en otras ocasiones la función $\log x$ representa a la función logaritmo neperiano (a menudo, representada por $\ln x$).

Las reglas de derivación anteriores dan lugar a algunas pautas para el cálculo de las llamadas *primitivas inmediatas*, así llamadas porque se obtienen de forma inmediata aplicando en sentido inverso («antiderivación») las reglas anteriores. El siguiente cuadro recoge algunas de ellas:

Función	Antiderivada	Función	Antiderivada
$(f(x))^n f'(x)\ (n \neq -1)$	$\dfrac{f(x)^{n+1}}{n+1}$	$\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$	$\operatorname{tg} f(x)$
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\log \lvert f(x) \rvert$	$\dfrac{-f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}$	$\operatorname{cotg} f(x)$
$e^{f(x)} f'(x)$	$e^{f(x)}$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$	$\operatorname{arcsen} f(x)$
$(\operatorname{sen} f(x)) f'(x)$	$-\cos f(x)$	$\dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$	$\arccos f(x)$
$(\cos f(x)) f'(x)$	$\operatorname{sen} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$	$\operatorname{arctg}(f(x))$

Llamamos la atención sobre el hecho de que, aunque $f(x)$ tome valores negativos, la derivada de $\log |f(x)|$ se expresa mediante la fórmula habitual: $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

En el cuadro anterior únicamente hemos incluido, en cada caso, una de las infinitas antiderivadas de la función en cuestión, o dicho de otra manera, a cada una de ellas hay que sumarle la constante de integración. Además la antiderivación es una operación lineal lo que significa que la antiderivada de la suma de dos funciones es la suma de las antiderivadas de tales funciones y la antiderivada del producto por una constante de una función se obtiene multiplicando por dicha constante la antiderivada de la función.

Es tradicional utilizar el símbolo

$$\int f$$

para denotar el conjunto de las antiderivadas de f. Ese símbolo se emplea también para el concepto de integral, como ya hemos señalado en el capítulo 5, y a veces ello es causa de confusión entre los novicios. Advertimos al lector que antiderivación e integración son conceptualmente diferentes, aunque —lamentablemente para su enseñanza— compartan un mismo símbolo para representarlos. El hecho de utilizar un mismo símbolo se sustenta en que existe una estrecha relación entre ambos conceptos, debida al teorema fundamental del cálculo 5.3.1. A lo largo de este capítulo el significado de la simbología $\int f$ se limita a la antiderivación.

Conviene señalar que el cálculo de la antiderivada de una función es un problema mucho más difícil que el cálculo de la derivada. La derivada de cualquier fórmula, resultado de operaciones básicas (sumas, productos, cocientes, raíces...)

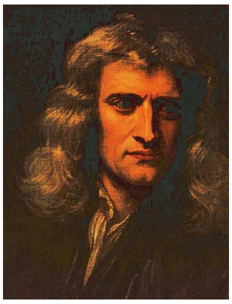

Figura 6.1: Sir Isaac Newton (1643–1727)

sobre funciones elementales, es calculable de manera explícita (utilizando las reglas de derivación) mediante una fórmula de naturaleza análoga. Por el contrario únicamente ciertos tipos de fórmulas con funciones elementales admiten antiderivada expresable mediante una fórmula de naturaleza análoga. Por ejemplo, funciones relativamente sencillas como $(\operatorname{sen} x)/x$ o e^{-x^2} no tienen una antiderivada expresable en términos de funciones elementales. O hablando informalmente, si escribimos una fórmula un poco complicada al azar podremos calcular su derivada sin problemas, pero la posibilidad de encontrar una fórmula para su antiderivada es escasa.

> Sir Isaac Newton, considerado uno de los dos cofundadores del cálculo infinitesimal moderno (el segundo es Gottfried Wilhelm von Leibniz), a propósito del problema de la integración de una ecuación diferencial cualquiera, que incluye la cuestión del cálculo de la antiderivada de una función arbitraria, escribía en 1666:
>
> *Si esto pudiera ser hecho cualquier cosa podría ser resuelta.*
>
> Isaac Newton nació en Woolsthorpe, una aldea de Lincolnshire (Inglaterra), el 4 de enero de 1643 y murió el 31 de marzo de 1727 en Londres.

Este capítulo está dedicado a describir técnicas que permiten calcular antiderivadas de ciertos tipos de funciones. Pero después de lo señalado, la estrategia para el cálculo de primitivas debe contemplar dos etapas: en la primera se trata de identificar el tipo (o tipos) a que pertenece la función y en la segunda aplicar, de acuerdo con las tipologías, las técnicas de antiderivación que correspondan, seleccionando, cuando existan varios, el más cómodo de los procedimientos.

En la primera sección se describen las técnicas generales para el cálculo de primitivas. En las siguientes secciones describiremos técnicas específicas para calcular las antiderivadas de ciertos tipos particulares de funciones.

Por razones de brevedad y para concentrarnos en las técnicas operatorias, frecuentemente pasaremos por alto cuestiones como el dominio de la función o la existencia de primitiva. El lector debería percatarse de este hecho y, eventualmente, fijar el sentido del símbolo $\int$. Queremos con ello decir, por poner un ejemplo, que mientras que escribir $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ tiene perfecto sentido para cualquier valor de x, la situación es diferente si escribimos $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

6.1. Cambio de variable e integración por partes

Una variante de la notación $\int f$ es $\int f(x)\,dx$. La segunda forma de denotar la antiderivada tiene ventajas de naturaleza nemotécnica sobre la primera: facilita los cambios de variable en el cálculo de primitivas. La fórmula del *cambio de variable* corresponde, en términos de antiderivación, a la regla de derivación de funciones compuestas, recordada al iniciar este capítulo. Puede ser formulada del siguiente modo:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt, \quad \text{donde } t = \varphi^{-1}(x)$$

supuesto que $x = \varphi(t)$, siendo φ una función derivable que establece una correspondencia «uno a uno» entre x y t. El significado de la fórmula anterior es pues que para calcular la antiderivada $\int f(x)\,dx$ podemos calcular, si nos conviene, la antiderivada $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ y, a continuación, sustituir t por su expresión en términos de x, que viene dada por $t = \varphi^{-1}(x)$. La fórmula anterior resulta nemotécnicamente sencilla con el siguiente convenio:

> si hacemos $x = \varphi(t)$ entonces $x' = \varphi'(t)$ y si escribimos $x' = dx/dt$, sustituyendo y operando formalmente se tendría $dx = \varphi'(t)\,dt$.

Ejemplo 6.1.1 Para ilustrar el cambio de variable consideremos la siguiente primitiva

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Obviamente $\sqrt{1-x^2}$ sólo tiene sentido para $-1 \leq x \leq 1$ y podemos hacer el cambio de variable determinado por la fórmula $x = \operatorname{sen} t$, que es una función derivable y que establece una correspondencia «uno a uno» entre $x \in [-1,1]$ y $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, siendo $dx = \cos t\,dt$, con lo que

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t\,dt = \\
&= \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} = \\
&= \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + C = \frac{t + \operatorname{sen} t \cos t}{2} + C = \\
\text{[deshaciendo el cambio]} &= \frac{\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + C
\end{aligned}$$

Maxima puede ayudarnos a comprobar que el resultado obtenido es realmente una antiderivada. Y, en efecto,

```
diff( (asin(x)+ x*sqrt(1-x^2))/2, x );
```

proporciona (traduciendo el resultado al simbolismo usual)

$$\frac{\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2}$$

y haciendo la simplificación racional de esta expresión mediante la sentencia `fullratsimp(%);` (`%` es la forma de referirse a la última salida) proporciona finalmente

$$\sqrt{1-x^2}.$$

Por otra parte Maxima puede obtener de forma directa la primitiva buscada mediante

```
integrate( sqrt(1-x^2),x );
```

La fórmula del cambio de variable, como ya hemos dicho, es únicamente una reformulación en términos de antiderivadas de la regla de derivación para funciones compuestas. Otras reformulaciones de las reglas de derivación son las siguientes:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \qquad \text{siendo } a \text{ constante}$$

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Las dos primeras expresan que $\int$ actúa linealmente, mientras que la última, conocida con el nombre de *integración por partes*, es la reformulación, para antiderivadas, de la regla de derivación para un producto de funciones.

Ejemplos 6.1.2 Ilustraremos el método de integración por partes calculando dos primitivas.

(1) $\displaystyle\int x\log x\,dx$

Haciendo $u(x) = \log x$ y $v'(x) = x$ se tiene $u'(x) = 1/x$ y $v(x) = x^2/2$, de donde

$$\int x\log x\,dx = (x^2/2)\log x - \int (x^2/2)(1/x)\,dx = (x^2/2)\log x - (x^2/4) + C.$$

(2) $\displaystyle\int \frac{xe^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Mediante el cambio de variable $t = \arccos x$, ($\cos t = x$ y $dt = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$) se obtiene

$$\int \frac{xe^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int e^t\cos t\,dt.$$

Esta última primitiva puede ser calculada mediante integración por partes en dos etapas.

$$\int e^t \cos t \, dt = e^t \cos t + \int e^t \operatorname{sen} t \, dt = e^t \cos t + e^t \cos t - \int e^t \cos t \, dt$$

y en consecuencia

$$\int e^t \cos t \, dt = \frac{1}{2} e^t (\cos t + \operatorname{sen} t).$$

Así pues

$$\int \frac{x e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} e^{\arccos x} (x + \sqrt{1-x^2}) + C$$

Sin embargo el excelente comportamiento proporcionado, hasta ahora, por MAXIMA en el cálculo de primitivas no debería llevarnos a conclusiones precipitadas sobre «la pérdida de tiempo y energías» o la futilidad que los razonamientos teóricos representan frente al poder del artefacto informático. Concretamente, cuando con

```
integrate( (x*%e^(acos(x)))/sqrt(1-x*x),x );
```

tratamos de obtener una primitiva para el segundo de los ejemplos anteriores el resultado que se obtiene corresponde a

$$\int \frac{x \, e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

¡Descorazonador! Diríase que MAXIMA no hace nada salvo el dar como respuesta la propia pregunta reescrita. En realidad la situación no es tan dramática y MAXIMA sabe más sobre el resultado de lo que a primera vista puede parecer. Por ejemplo, es capaz de calcular la segunda derivada de la función resultante mediante

```
diff(%,x,2);
```

Pero, paños calientes aparte, en este enfrentamiento con el humano, MAXIMA resulta perdedor.

A pesar de este fracaso hay que señalar que el humano puede todavía tratar de sacarle partido a MAXIMA. Podemos decirle que realice en la primitiva el cambio de variable que realizaríamos nosotros

```
changevar(integrate( (x*%e^(acos(x)))/sqrt(1-x*x),x ), t-acos(x),t,x );
```

obteniendo

$$-\int \frac{e^t \cos t \, \sin t}{\sqrt{1-\cos t}\,\sqrt{\cos t + 1}} \, dt = [\text{es decir}] - \int e^t \cos t \, dt$$

... lo cual nos va a permitir obtener el resultado deseado.

6.2. Funciones racionales

Un polinomio es una función obtenida sumando distintas potencias enteras, afectadas de coeficientes, es decir, una función de la forma:

$$P(x) = M_n x^n + M_{n-1} x^{n-1} + \cdots + M_0$$

siendo los coeficientes M_i, $0 \le i \le n$, números reales o complejos. El valor de n, la mayor de las potencias que aparece en el polinomio, se denomina el *grado del polinomio*. También podemos representar un polinomio genérico, como el anterior $P(x)$, en forma más breve, utilizando el símbolo $\sum$, denominado *suma* o *sumatorio*:

$$P(x) = M_n x^n + M_{n-1} x^{n-1} + \cdots + M_0 = \sum_{k=0}^{n} M_k x^k$$

El denominado *índice* del sumatorio (es decir, k) puede ser sustituido por cualquier otra letra, a excepción en este caso, de las letras M y x que intervienen en la expresión de las cantidades sumadas. El significado del sumatorio es claro: sumamos diversos términos que dependen del índice k, para valores de dicho índice que, en la expresión anterior, varían entre los valores 0 y n.

Los polinomios son funciones que siempre admiten primitivas que se calculan de forma sencilla utilizando la linealidad y las primitivas de x^n para n un número entero positivo. Así, para el polinomio anterior:

$$\int P(x)\,dx = \int \sum_{k=0}^{n} M_k x^k\,dx = \sum_{k=0}^{n} M_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

Con el nombre de funciones racionales nos referimos a funciones que son cociente de dos polinomios, es decir, de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios. Para que la función R esté bien definida requeriremos, en un primer momento, que el polinomio Q no tenga ceros en un cierto intervalo $[a, b]$, donde estudiaremos dicha función.

Un número α, real o complejo, se dice que es raíz de un polinomio $P(x)$, o que es un cero del mismo, si $P(\alpha) = 0$. Es sencillo comprobar que α es raíz de $P(x)$ si y sólo si el polinomio $(x - \alpha)$ divide al polinomio $P(x)$, es decir, si y sólo si existe un polinomio $Q(x)$ tal que $P(x) = Q(x)(x - \alpha)$.

El teorema fundamental del álgebra (que se incluye en el capítulo 8) establece que cualquier polinomio $P(x) = M_n x^n + M_{n-1} x^{n-1} + \cdots + M_0$, de grado n, tiene exactamente n raíces, reales o complejas, digamos $z_1, z_2, \ldots z_n$. Esto permite una factorización del polinomio P en la forma siguiente:

$$M_n x^n + M_{n-1} x^{n-1} + \cdots + M_0 = M_n (x - z_1)(x - z_2) \ldots (x - z_n).$$

Si algunas de las raíces coinciden (por ejemplo, si $z_1 = z_2$) entonces el valor común se denomina raíz múltiple (doble, triple, etc. según el número de veces que se repite en la descomposición anterior).

Si los coeficientes M_j del polinomio son reales, que es el caso del que nos ocuparemos aquí, con cada raíz compleja z_k existe la compleja conjugada, $\overline{z_k}$, y el producto $(x - z_k)(x - \overline{z_k})$ produce un factor del tipo $(x^2 + bx + c)$, exactamente:

$$(x - z_k)(x - \overline{z_k}) = x^2 - (z_k + \overline{z_k})x + z_k\overline{z_k}$$

Si tomamos $z_k = \alpha_k + i\beta_k$, con α_k, β_k números reales e $i = \sqrt{-1}$, la unidad imaginaria, tenemos, por definición del conjugado, $\overline{z_k} = \alpha_k - i\beta_k$, y así:

$$\begin{aligned} z_k + \overline{z_k} &= 2\alpha_k \\ z_k\overline{z_k} &= \alpha_k^2 + \beta_k^2 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$x^2 + bx + c = x^2 - 2\alpha_k x + (\alpha_k^2 + \beta_k^2).$$

Como consecuencia el polinomio $M_n x + M_{n-1}x^{n-1} + \cdots + M_0$ puede descomponerse (excluido el factor constante M_n) como un producto de factores elementales del tipo $(x - d)^\alpha$ y $(x^2 + bx + c)^\beta$ donde los factores del tipo $(x^2 + bx + c)$ no tienen raíces reales.

Para una función racional $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, si descomponemos como antes cada uno de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, podemos eliminar aquellos factores del tipo $(x - d)^\alpha$ y $(ax^2 + bx + c)^\beta$ que sean comunes al numerador y al denominador, consiguiendo que cada uno de dichos factores sólo aparezca en una de esas dos posiciones. Así nos damos cuenta de que, una vez «simplificada» en dicha forma la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$, la misma función racional $R(x)$ se puede escribir como cociente de dos polinomios $\frac{p(x)}{q(x)}$ tales que $p(x)$ y $q(x)$ no tienen ninguna raíz común. Además, una vez simplificada, nos damos cuenta de que $R(x)$ está definida para cualquier valor de x con la única excepción de los valores que son raíz del denominador $q(x)$.

Para describir la técnica del cálculo de primitivas de las funciones racionales distinguiremos dos casos según que haya o no raíces múltiples. Pero comenzamos haciendo notar que no es restrictivo suponer que el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador, ya que en otro caso, puede hacerse una división escribiéndolo en la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, siendo $C(x)$ el cociente y $R(x)$ el resto de la división (que siempre tiene grado menor que el divisor).

6.2.1. Caso de raíces simples

Se trata de calcular la primitiva de una función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con grado de P menor estrictamente que grado de Q y donde $Q(x)$ sólo tiene raíces simples, en otras palabras

$$Q(x) = M_n(x - z_1)(x - z_2)(x - z_n)$$

donde todas las z_i son diferentes. Si alguna de las z_i no es real también aparece su compleja conjugada por lo que, agrupando convenientemente, se obtiene una factorización polinómica del siguiente tipo

$$Q(x) = M_n(x - x_1) \dots (x - x_k)(x^2 + b_1x + c_1)(x^2 + b_2x + c_2) \dots (x^2 + b_jx + c_j),$$

en donde los factores de primer grado corresponden a las raíces reales simples, mientras que los factores de segundo grado corresponden a los productos determinados por las raíces complejas (también simples) agrupando cada una de ellas con su compleja conjugada.

Una vez realizada esta factorización polinómica pueden encontrarse constantes $A_1, A_2, \dots A_k, B_1, B_2, \dots B_j, C_1, C_2, \dots C_j$ unívocamente determinadas de forma que se verifica para todo x la identidad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_k}{x - x_k} + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + b_1x + c_1} + \cdots + \frac{B_jx + C_j}{x^2 + b_jx + c_j} \tag{6.1}$$

Aunque es posible dar una demostración abstracta de este hecho[1], en la práctica lo utilizaremos en casos concretos, y se comprobará, de forma particular, la validez del enunciado general. Y como el cálculo de primitivas es una operación lineal, la primitiva de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se obtendrá sumando las primitivas de las fracciones que aparecen en el segundo miembro de la identidad.

Ahora bien todas esas primitivas responden a dos modelos dados, respectivamente, por

$$\int \frac{A_1}{x - x_1}\, dx \text{ y } \int \frac{B_1x + C_1}{x^2 + b_1x + c_1}\, dx.$$

De estas dos primitivas, la primera es realmente trivial ya que es

$$\int \frac{A_1}{x - x_1}\, dx = A_1 \log |x - x_1| + D$$

siendo D una constante arbitraria.

La segunda también es sencilla, pero requiere trabajar un poco más. Para simplificar la escribimos en la forma:

$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}\, dx.$$

A partir de esta última seguimos una serie de pasos, sencillos y sistemáticos que se exponen a continuación y que son explicados más adelante.

$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}\, dx = \int \frac{Bx + C}{(x + p/2)^2 + (q - p^2/4)}\, dx \quad \text{[paso 1]}$$

[1]Véase, por ejemplo, la sección 7.2.2 de Ramis, E. ; Deschamps, C. y Odoux, J. *Algèbre*, Masson et Cie, 1974.

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{B(x+p/2)+C-Bp/2}{(x+p/2)^2+(q-p^2/4)}\,dx \quad \text{[paso 2]}\\
&= \frac{B}{2}\int \frac{2(x+p/2)}{(x+p/2)^2+(q-p^2/4)}\,dx +\\
&\qquad + \int \frac{C-Bp/2}{(x+p/2)^2+(q-p^2/4)}\,dx \quad \text{[paso 3]}\\
&= \frac{B}{2}\log\left[(x+p/2)^2+(q-p^2/4)\right] +\\
&\qquad + \int \frac{C-Bp/2}{(x+p/2)^2+(q-p^2/4)}\,dx \quad \text{[paso 4]}\\
&= \frac{B}{2}\log\left[(x+p/2)^2+(q-p^2/4)\right] +\\
&\quad + (C-Bp/2)\frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} + D
\end{aligned}
$$

En el primer paso realizamos el procedimiento conocido como el de *completar cuadrados*, es decir: manipulamos el polinomio x^2+px+q para conseguir escribirlo como suma de dos cuadrados. Para ello comenzamos escribiendo $px = 2\frac{p}{2}x$, y, ahora, la suma $x^2 + 2\frac{p}{2}x$ es del tipo obtenido al elevar un binomio al cuadrado. Así, $(x+\frac{p}{2})^2 = x^2+px+\frac{p^2}{4}$ y puesto que el término $\frac{p^2}{4}$ no aparece en el polinomio inicial, conseguimos la expresión deseada sumando y restando dicho término.

Acabamos de afirmar que mediante la idea de completar cuadrados, conseguimos escribir el polinomio cuadrático x^2+px+q como suma de dos cuadrados. ¿Es esto cierto? ¿Qué estamos suponiendo, implícitamente, sobre dicho polinomio? En particular, concluya que el término $q-\frac{p^2}{4}$ es positivo.

El segundo paso es muy sencillo: puesto que en el denominador aparece el binomio $(x+p/2)$ y en el numerador sólo el término Bx, sumamos y restamos la cantidad $B\frac{p}{2}$.

El tercer paso es también muy sencillo: separamos en dos sumandos (utilizando la linealidad de la antiderivación) y completamos, en el primero de los sumandos, la parte que contiene a x en el numerador, para conseguir ajustar las constantes de forma que tengamos en el numerador la derivada del denominador.

El paso 4 es únicamente el cálculo del primer sumando, que proporciona un logaritmo (todo lo anterior era para obtener precisamente esto).

Finalmente el cálculo de la antiderivada en el segundo sumando procede de forma sencilla para obtener una función arc tg; lo repetimos a continuación con expresiones más sencillas para las constantes: para $c > 0$ tenemos:

$$\int \frac{A}{(x+b)^2+c}\,dx = \int \frac{A}{(x+b)^2+(\sqrt{c})^2}\,dx = \frac{A}{\sqrt{c}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{c}}}{\left(\frac{x+b}{\sqrt{c}}\right)^2+1}\,dx =$$
$$= \frac{A}{\sqrt{c}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+b}{\sqrt{c}}\right)+D$$

Ejemplo 6.2.1 Cálculo de la primitiva

$$\int \frac{x^4+4x^3}{x^4+3x^3-x-3}\,dx.$$

En primer lugar, puesto que el grado del polinomio del numerador es igual al del polinomio del denominador, efectuamos la división y obtenemos, como es fácil comprobar, que el cociente es 1 y que el resto (que debe tener grado estrictamente menor que el del divisor) es x^3+x+3. Así pues se tiene

$$x^4+4x^3 = 1\,(x^4+3x^3-x-3)+x^3+x+3$$

y en consecuencia

$$\int \frac{x^4+4x^3}{x^4+3x^3-x-3}\,dx =$$
$$\int \frac{(x^4+3x^3-x-3)+x^3+x+3}{x^4+3x^3-x-3}\,dx =$$
$$\int \left(1+\frac{x^3+x+3}{x^4+3x^3-x-3}\right)dx =$$
$$x+\int \frac{x^3+x+3}{x^4+3x^3-x-3}\,dx.$$

Para calcular

$$\int \frac{x^3+x+3}{x^4+3x^3-x-3}\,dx$$

necesitamos factorizar el denominador. Para ello necesitamos hallar las raíces del polinomio que aparece en el denominador. Pero, aunque un polinomio de grado n tiene n raíces reales o complejas, simples o múltiples, no hay un procedimiento general para calcularlas, sólo en algunos casos sencillos es posible calcularlas. Uno de tales casos (el más habitual en los ejemplos que aquí estudiaremos) se presenta cuando se trata de un polinomio cuyos coeficientes son números enteros, que es mónico (es decir el coeficiente del término de mayor grado es 1) y existe una raíz entera: en tal caso dicha raíz es divisor entero del término de grado cero (o término independiente) del polinomio[2].

[2]Más generalmente: para cualquier polinomio de coeficientes enteros si la fracción p/q, que se supone reducida, es raíz del polinomio, entonces p debe dividir al coeficiente de grado cero y q debe dividir al coeficiente principal(o coeficiente del término de mayor grado).

En concreto, en el caso que nos ocupa, si hay alguna raíz entera del polinomio $x^4 + 3x^3 - x - 3$ debe ser un divisor de -3 por tanto ha de se ser ± 1 o ± 3. Es fácil comprobar que el polinomio se anula para $x = 1$, así que el polinomio $x^4 + 3x^3 - x - 3$ es divisible por $x - 1$. Realizando la división, ya sea de forma directa o utilizando la técnica de Rufini, se obtiene como cociente $x^3 + 4x^2 + 4x + 3$. Así pues

$$x^4 + 3x^3 - x - 3 = (x - 1)(x^3 + 4x^2 + 4x + 3)$$

El polinomio $x^3 + 4x^2 + 4x + 3$ está en las mismas condiciones que el anterior y utilizando la misma técnica repetidas veces se obtiene

$$x^4 + 3x^3 - x - 3 = (x - 1)(x + 3)(x^2 + x + 1).$$

Finalmente llegamos al polinomio de segundo grado $x^2 + x + 1$ para el cual disponemos de un procedimiento general para el cálculo de sus raíces, pero en nuestro caso dicho polinomio no tiene raíces reales y por tanto no es factorizable como producto de otros. ¡La factorización ha finalizado!

Ahora utilizamos un método de coeficientes indeterminados para hacer la descomposición en fracciones simples. Concretamente, escribimos:

$$\frac{x^3 + x + 3}{x^4 + 3x^3 - x - 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3} + \frac{Mx + N}{x^2 + x + 1}$$

Tras reducir a común denominador en el segundo miembro y agrupar según las potencias de x se llega a:

$$\frac{x^3(A + B + M) + x^2(4A + 2M + N) + x(4A + 2N - 3M) + (3A - B - 3N)}{x^4 + 3x^3 - x^2 - x - 3}$$

es decir a que, para todo x,

$$x^3 + x + 3 \equiv x^3(A + B + M) + x^2(4A + 2M + N) + x(4A + 2N - 3M) + (3A - B - 3N)$$

lo que conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A + B + M &= 1 \\ 4A + 2M + N &= 0 \\ 4A + 2N - 3M &= 1 \\ 3A - B - 3N &= 3 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son: $A = 5/12, B = 27/28, M = -8/21, N = -19/21$.

Así pues

$$\int \frac{x^3 + x + 3}{x^4 + 3x^3 - x - 3} = \int \frac{5/12}{x - 1} + \int \frac{27/28}{x + 3} - \frac{1}{21} \int \frac{8x + 19}{x^2 + x + 1}$$

Las primitivas de $\int \frac{1}{x-1}$ y $\int \frac{1}{x+3}$ son inmediatas. La tercera, como ocurre en general, corresponde a la suma de un logaritmo y un arco tangente, veamos cómo.

$$\begin{aligned}\int \frac{8x+19}{x^2+x+1}\,dx &= 4\int \frac{2x+19/4}{x^2+x+1}\,dx = 4\int \frac{2x+1+19/4-1}{x^2+x+1}\,dx\\ &= 4\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + 15\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx\\ &= 4\log(x^2+x+1) + 15\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx &= \int \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3/4}}\right)^2+1}\,dx\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\end{aligned}$$

Los comandos `factor` (que permite factorizar numerica y simbólicamente, `solve` (que permite resolver ecuaciones) y `partfrac` (que realiza una descomposición en fracciones simples adecuada al cálculo de primitivas y otros propósitos) son instrumentos muy útiles para calcular, paso a paso, primitivas de funciones racionales. Si bien MAXIMA puede calcular dichas primitivas de forma directa.

Ejemplo 6.2.2 Cálculo de la primitiva

$$\int \frac{1}{x^4+x^2+2}dx.$$

Evidentemente el denominador es estrictamente positivo para todos los números reales. En consecuencia todas sus raíces son números complejos (no reales), pero siendo los coeficientes del polinomio números reales, las cuatro raíces han de ser sendas parejas de complejos conjugados. Por otra parte es claro que si z es una raíz también lo es $-z$, en resumen una vez que encontremos una raíz z las otras tres son $-z$, $\overline{z}$ y $-\overline{z}$. Para determinar las raíces podemos considerar

$$0 = x^4+x^2+2 = (x^2)^2+x^2+2 = t^2+t+2$$

con lo que

$$t = x^2 = \frac{-1+\sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1+\sqrt{7}i}{2}.$$

Así que una de las raíces es

$$\sqrt{\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}} = a+bi \quad \text{para ciertos reales } a, b.$$

Podemos determinar a y b a través del sistema de dos ecuaciones con incógnitas a y b obtenido elevando al cuadrado e identificando las partes real e imaginaria de ambos miembros de la ecuación anterior, es decir,

$$-\frac{1}{2} = a^2 - b^2, \qquad \frac{\sqrt{7}}{2} = 2ab$$

que una vez resuelto da como una de sus soluciones (sólo necesitamos una) la pareja

$$a = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}, \qquad b = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+1}}{2}.$$

La factorización del polinomio es

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 2 &= \Big(x - (a+bi)\Big)\Big(x - (a-bi)\Big)\Big(x + (a+bi)\Big)\Big(x + (a-bi)\Big) \\ &= \Big((x-a)^2 + b^2\Big)\Big((x+a)^2 + b^2\Big) \\ &= \Big(x^2 - 2ax + a^2 + b^2\Big)\Big(x^2 + 2ax + a^2 + b^2\Big) \qquad (6.2) \end{aligned}$$

siendo a y b los valores anteriormente calculados. Una vez factorizado el denominador se aplica el procedimiento de coeficientes indeterminados antes descrito y se consigue finalmente calcular la primitiva buscada.

Aunque conceptualmente simples, los cálculos anteriores resultan tediosos. Desgraciadamente la versión de MAXIMA disponible cuando se escribieron estas notas ante la orden
```
integrate( 1/(x^4 + x^2 + 2),x );
```
únicamente proporciona

$$\int \frac{1}{x^4 + x^2 + 2}\, dx.$$

Pero utilizando otros recursos de MAXIMA podemos simplificarnos las tareas tediosas.
`rectform(solve(x^4 + x^2 + 2,x));` (calcula las raíces en forma binomia)

$$x = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+1}\, i}{2} + \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}, [\text{... y las otras tres raíces}]$$

y ahora, conocidos a y b, podemos factorizar el denominador como indica la identidad 6.2 y con un oportuno comando `integrate` sobre la misma (que no escribimos por brevedad) obtener finalmente la primitiva buscada:

$$\frac{4\,\mathrm{arctg}\left(\frac{8x-4\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{4\sqrt{2\sqrt{2}-1}}\right)}{\left(2\sqrt{2}-1\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{8x - 4\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{\left(8\sqrt{2}-4\right)x^2 + \left(4-8\sqrt{2}\right)\sqrt{2\sqrt{2}-1}\,x + \left(2\sqrt{2}-1\right)^2 - 4\sqrt{2} + 9}$$

Para acabar esta sección señalemos que si alguna (o algunas) de las raíces, $x = x_i$ o $x = z_i$, hubiera sido de orden n (doble, triple,...) la técnica de descomposición en fracciones simples requiere incluir n sumandos cuyos numeradores son una constante o un polinomio de grado uno con coeficientes indeterminados, según se trate de una raíz real o una compleja, tal y como hemos visto para el caso de raíces simples, pero con el exponente del denominador creciendo desde 1 hasta n. Por ejemplo, para el caso de una raíz real x_1 de orden 3 y una raíz compleja de orden 2 correspondiente al polinomio $(a_i x^2 + b_i x + c_i)$ los denominadores que permiten garantizar la compatibilidad del sistema, y por tanto la descomposición en fracciones simples, serían $(x-x_1), (x-x_1)^2, (x-x_1)^3, \quad (a_i x^2+b_i x+c_i), (a_i x^2+b_i x+c_i)^2$. No desarrollamos más este procedimiento porque en la sección siguiente describimos un método general válido para raíces múltiples, tanto reales como complejas.

A pesar de que no entremos en mayores detalles, vamos a valernos de Maxima para mostrar, mediante un ejemplo, una tal descomposición en el caso de raíces múltiples con ayuda del comando `partfrac`. Así,
`partfrac( (x^2 -2)/((x-1)^3*(x^2+1)^2),x);` permite escribir

$$\int \frac{x^2-2}{(x-1)^3(x^2+1)^2} = -\int \frac{5}{4\,(x-1)} + \int \frac{1}{(x-1)^2} - \int \frac{1}{4\,(x-1)^3} + \int \frac{5\,x+1}{4\,(x^2+1)} + \int \frac{3\,x-3}{4\,(x^2+1)^2}.$$

Únicamente la última primitiva no está comprendida en las técnicas ya introducidas. En el ejercicio 6.3 se presenta un método para primitivas de este tipo.

6.2.2. Caso de raíces múltiples: método de Hermite–Ostrogradsky

La técnica que describimos en este apartado se conoce con el nombre de método de Hermite–Ostrogradsky y permite reducir el caso de las raíces múltiples al de las raíces simples.

Sea $\frac{P(x)}{Q(x)}$ una función racional con el grado de P menor que el grado de Q. Para utilizar el método necesitamos considerar los polinomios: $D_1(x)$ que es el máximo común divisor entre $Q(x)$ y su derivada $Q'(x)$ y $D_2(x) = \frac{Q(x)}{D_1(x)}$.

El cálculo de $D_1(x)$ y $D_2(x)$ es sencillo si suponemos que ya hemos factorizado $Q(x)$. Así, suponiendo $Q(x) = M_n(x-z_1)^{\alpha_1}(x-z_2)^{\alpha_2}\dots(x-z_k)^{\alpha_k}$ entonces:

$$D_1(x) = M_n(x-z_1)^{(\alpha_1-1)}(x-z_2)^{(\alpha_2-1)}\dots(x-z_k)^{(\alpha_k-1)}$$

$$D_2(x) = (x-z_1)(x-z_2)\dots(x-z_k).$$

Con esas notaciones es posible encontrar polinomios $A(x)$ y $B(x)$ tales que el grado de A es menor que el grado de D_1, el grado de B es menor que el grado de D_2, y que cumplen:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{A(x)}{D_1(x)}\right)' + \frac{B(x)}{D_2(x)} \tag{6.3}$$

donde la tilde en $(A/D_1)'$ denota la derivada. Los polinomios A y B pueden determinarse utilizando para ello polinomios con coeficientes genéricos que se calculan de forma concreta en cada caso a través de la ecuación (6.3). Aunque es posible dar una demostración de este hecho, en la práctica lo utilizaremos en casos concretos, donde de forma efectiva, mediante la compatibilidad del sistema de Cramer, se comprobará la validez del enunciado antes formulado .

Como consecuencia de la ecuación (6.3), calculando en ambos miembros la antiderivada, obtenemos:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{A(x)}{D_1(x)} + \int \frac{B(x)}{D_2(x)}\,dx$$

Obsérvese que como D_2 sólo tiene raíces simples, la primitiva $\int \frac{B(x)}{D_2(x)}\,dx$ es de las del tipo considerado en el apartado anterior.

Ejemplo 6.2.3

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}dx$$

En este caso el polinomio del denominador ya está factorizado, pues no existen raíces reales de $x^2+1=0$. Así que, en esta ocasión,

$$D_1(x) = (x^2+1)^2, \quad D_2(x) = (x^2+1)$$

y por tanto

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = \left(\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+1)^2}\right)' + \int \frac{Ex+F}{(x^2+1)}\,dx.$$

Para calcular los coeficientes desconocidos hemos de efectuar el cálculo de la derivada obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2+1)^3} &= \left(\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+1)^2}\right)' + \frac{Ex+F}{(x^2+1)} \quad \text{[y efectuando cálculos]} \\ &= \frac{(3Ax^2+2Bx+C)(x^2+1)-4x(Ax^3+Bx^2+Cx+D)}{(x^2+1)^3} \\ &+ \frac{(Ex+F)(x^2+1)^2}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

Lo que, a través de,

$$1 = Ex^5 + (F-A)x^4 + (2E-2B)x^3 + (3A-3C+2F)x^2 + (2B-4D+E)x + C + F$$

conduce a un sistema lineal compatible de 6 ecuaciones con 6 incógnitas.

$$\begin{aligned} E &= 0 \\ F-A &= 0 \\ 2E-2B &= 0 \\ 3A-3C+2F &= 0 \\ 2B-4D+E &= 0 \\ C+F &= 1 \end{aligned}$$

Figura 6.2: Ostrogradski (izquierda) y Hermite

cuya solución es: $A = 3/8 = F, B = D = E = 0, C = 5/8$.

Tenemos entonces que

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx = \frac{3x^3+5x}{8(x^2+1)^2} + \int \frac{3/8}{x^2+1}\, dx$$

El cálculo de

$$\int \frac{3/8}{x^2+1}\, dx$$

no tiene ninguna dificultad y tampoco la tendría aunque el numerador fuese un polinomio de grado uno.

Una vez estudiado el cálculo de primitivas de funciones racionales, en lo que sigue estudiamos otro tipo de funciones tratando de ***reducirlas****, mediante cambios de variable adecuados, a primitivas de* ***funciones racionales****.*

Mikhail Vasilevich Ostrogradski, nació el 24 de septiembre de 1801 en Pashennaya (actualmente en Ucrania) y falleció el primero de enero de 1862, en la misma población. Perteneció a la Academia Rusa de Ciencias, en su sección de matemática aplicada. Trabajó en numerosas disciplinas dentro de las matemáticas puras y aplicadas: ecuaciones en derivadas parciales, análisis complejo, álgebra, teoría del calor, de la elasticidad, hidrodinámica, etc.

Charles Hermite nació en Dieuze (en la Lorena, Francia) el 24 de diciembre de 1822 y murió en París el 14 de enero de 1901. Sin duda su resultado más conocido es la trascendencia del número e (este número se define rigurosamente en el capítulo 2; un número es trascendente si no es raíz de ningún polinomio de coeficientes enteros). Realizó importantes trabajos en álgebra, teoría de números y análisis matemático; son conocidas referencias a este importante matemático las nociones de: polinomios de Hermite, ecuación diferencial de Hermite, fórmula de interpolación de Hermite y matrices (operadores) hermitianas.

Henri Poincaré, uno de los más grandes matemáticos de toda la historia y alumno de Hermite escribió:

> *¡Llamar a Hermite un lógico! nada me parece más contrario a la verdad. Los métodos parecían siempre nacer en su mente en alguna misteriosa forma.*

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$	$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$
$\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$	$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen} x$	$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
$\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
$\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$	$\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$
$1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$
$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$	$\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$
$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \dfrac{x-y}{2} \cos \dfrac{x+y}{2}$	$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{sen} \dfrac{x-y}{2}$

Cuadro 6.1: Relaciones trigonométricas básicas. Estas relaciones, que seguramente el estudiante conoce y ha usado en la enseñanza media, serán demostradas con rigor en el capítulo 8.

6.3. Funciones racionales en seno y coseno

El calculo de primitivas de funciones trigonométricas exige el conocimiento de las relaciones trigonométricas que se suele aprender en la enseñanza media. A modo de recordatorio resumiremos en el cuadro 6.1 las relaciones trigonométricas más utilizadas.

Un polinomio en las variables x e y es una expresión de la forma:

$$P(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{jk} x^j y^k$$

No es algo muy diferente de un polinomio ordinario $P(x)$ en una variable; la única diferencia es que ahora cada sumando puede contener el producto de una potencia de x y otra de y.

Llamaremos función racional en dos variables a una función $R(x,y)$ que es cociente de dos polinomios, cada uno de ellos en las variables x e y.

Una función racional en seno y coseno es una expresión de la forma

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

siendo $R(x,y)$ una función racional en dos variables.

El cálculo de la antiderivada de este tipo de funciones $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se reduce al de las consideradas en la sección 6.2 mediante el *cambio general de variable* dado por

$$t = \operatorname{tg}(x/2).$$

En efecto, se tienen las fórmulas

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x =& 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{1+t^2} \\
\cos x =& \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
x =& 2 \operatorname{arctg} t \\
dx =& \frac{2}{1+t^2} dt,
\end{aligned}$$

lo que permite escribir $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$ como la antiderivada de una función racional $\int R_1(t)\, dt$. En efecto:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int R_1(t)\, dt$$

puesto que la expresión en la segunda antiderivada es una función racional de t. ¿Por qué?

Ejemplo 6.3.1 Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx$.
Hacemos el cambio de variable $t = \operatorname{tg}(x/2)$ lo que nos da:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt \\
&= \int \frac{1}{t}\, dt = \log|t| + C = \log|\operatorname{tg}(x/2)| + C
\end{aligned}$$

Calcule la primitiva anterior haciendo uso de Maxima y compare el resultado que la herramienta informática proporciona con el que aparece escrito en la fórmula anterior. ¿Coinciden los resultados? Explique razonadamente su respuesta.

En algunos casos particulares pueden hacerse otros cambios más específicos que, frecuentemente, dan lugar a primitivas más sencillas de calcular.

- Si R es una función par en seno y coseno, es decir,

  $$R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x),$$

  lo que significa que cambiando simultáneamente $\operatorname{sen} x$ por $-\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ por $-\cos x$ se obtiene la misma función, entonces puede comprobarse que el cambio

  $$t = \operatorname{tg} x$$

permite reducir también la primitiva a una del tipo considerado en la sección 6.2. Se tiene la siguiente fórmula

$$t^2 = \operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$$

que permite expresar $\operatorname{sen} x$ en función de t. Procediendo de forma similar con la función coseno se obtienen, finalmente, las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Ejemplo 6.3.2 Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x}\, dx$
En primer lugar observamos que la función de la que queremos calcular la antiderivada es par en seno y coseno; en efecto:

$$\begin{aligned} R(\operatorname{sen} x, \cos x) &= \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{(-\operatorname{sen} x)(-\cos x) + (-\cos x)^2} = R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) \end{aligned}$$

Entonces el cambio de variable $t = \operatorname{tg} x$ es adecuado y más sencillo que $t = \operatorname{tg}(x/2)$; así:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x}\, dx &= \int \frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} \frac{dx}{\cos^2 x} \\ &= \int \frac{dt}{1+t} = \log|1+t| + C = \log|1 + \operatorname{tg} x| + C \end{aligned}$$

- Si R es una función impar en seno es decir,

$$R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x),$$

entonces el cambio $t = \cos x$ permite reducir la primitiva a una del tipo considerado en la sección 6.2 como es fácil comprobar.

Ejemplo 6.3.3

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}\, dx &= \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x} \operatorname{sen} x\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x} \operatorname{sen} x\, dx \\ &= -\int \frac{1-t^2}{1+t^2}\, dt = -\int -1 + \frac{2}{1+t^2}\, dt = t - 2 \operatorname{arctg} t + C \\ &= \cos x - 2 \operatorname{arctg}(\cos x) + C. \end{aligned}$$

El lector debería comparar el cambio de variable empleado en este caso en que la función es impar en seno con el que se ha indicado con carácter general.

- Si R es una función impar en coseno, es decir,

$$R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x),$$

entonces el cambio $t = \operatorname{sen} x$ permite reducir la primitiva a la de una función racional, del tipo considerado en la sección 6.2.

Ejemplo 6.3.4

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x}\,dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x}\cos x\,dx = \int \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x}\cos x\,dx \\ &= \int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int\Big(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\Big)\,dt = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C \\ &= \log\sqrt{\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|} + C\end{aligned}$$

Estos cambios son preferibles al cambio general porque suelen conducir a unos cálculos más sencillos que el cambio general.

Lo anterior no agota los casos particulares. La utilización adecuada de los recursos trigonométricos puede proporcionar técnicas especiales para determinados casos concretos. Por ejemplo, las primitivas del tipo

$$\int \operatorname{sen}^{2n} x\,dx \quad \text{o} \quad \int \cos^{2n} x\,dx$$

se pueden calcular de forma sencilla utilizando reiteradamente los fórmulas trigonométricas para el ángulo doble (cuadro 6.1). Tal puede hacerse para el cálculo de $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$, que aunque puede ser considerada como función par en seno y coseno, susceptible, por tanto, de aplicarle el cambio $t = \operatorname{tg} x$, resulta más sencillo utilizar las fórmulas trigonométricas del ángulo doble:

$$\operatorname{sen}^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2} \quad , \quad \cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}.$$

Ejemplo 6.3.5

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x\,dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2\,dx = \int \Big(\frac{1-\cos 2x}{2}\Big)^2\,dx \quad [\text{desarrollando el cuadrado}] \\ &= \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2})\,dx \\ &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C\end{aligned}$$

Acabamos de explicar cómo se pueden calcular primitivas de las funciones de la forma $\operatorname{sen}^p x$ y $\cos^p x$ para p un entero par. Si $p = 2n+1$ es impar, ¿cómo procederíamos? De este caso no hemos comentado nada porque, en realidad, no es necesario. O, mejor dicho, es muy fácil. ¿Sabe cómo se hace? Si no es así puede consultar algún libro sobre el tema o realizar la siguiente pequeña reflexión: escriba (en uno de los casos) $\operatorname{sen}^{2n+1} x = \operatorname{sen}^{2n} x \operatorname{sen} x$, utilice la fórmula fundamental de la trigonometría para sustituir $\operatorname{sen}^2 x$ por una expresión del $\cos x$, ¿entiende ya cómo proceder?

Otras familias particulares de funciones trigonométricas para las que existen métodos específicos de cálculo de sus primitivas, son las de la forma

$$\int \operatorname{sen} \alpha x \cos \beta x \, dx, \qquad \int \cos \alpha x \cos \beta x \, dx, \qquad \int \operatorname{sen} \alpha x \operatorname{sen} \beta x \, dx.$$

Suponiendo que $\alpha^2 \neq \beta^2$, pues en ese caso estas primitivas ya forman parte de los casos estudiados anteriormente, podemos realizar el cálculo utilizando las últimas fórmulas trigonométricas del cuadro 6.1.

Por ejemplo, si queremos calcular una primitiva de $\operatorname{sen} \alpha x \cos \beta x$, desearíamos poder expresar dicha función como suma de un seno y un coseno o de dos senos, o de dos cosenos. Para ello, recurriendo a la fórmula

$$\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v = 2 \operatorname{sen} \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

buscamos x e y tales que:

$$\begin{aligned} \alpha x &= \frac{u+v}{2} \\ \beta x &= \frac{u-v}{2} \end{aligned}$$

Tenemos así un sistema de ecuaciones cuya solución es: $u = (\alpha+\beta)x$ y $v = (\alpha-\beta)x$. Por tanto

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen} \alpha x \cos \beta x \, dx &= \frac{1}{2} \int \Big(\operatorname{sen}(\alpha+\beta)x + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)x \Big) \, dx \\ &= -\frac{\cos(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)} - \frac{\cos(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} \end{aligned}$$

6.4. Funciones racionales de e^x

El cálculo de la antiderivada de las funciones de este tipo, es decir de funciones de la forma $R(e^x)$, siendo $R(z)$ una función racional, se reduce a las consideradas en la sección 6.2 mediante el cambio $t = e^x$, como es inmediato comprobar.

Ejemplo 6.4.1

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} \, dx = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} e^x + C$$

6.5. Funciones racionales en senh y cosh

La antiderivación de esta funciones ($R(\operatorname{senh} x, \cosh x)$, siendo $R(x, y)$ racional de dos variables) se realiza de forma similar a las primitivas de funciones racionales en senos y cosenos (ordinarios) y también, en ocasiones, sustituyendo senh y cosh por sus valores, con lo que se transforman en racionales de e^x. Las fórmulas fundamentales aparecen en el cuadro 6.2 y pueden ser deducidas fácilmente a partir de la definición.

$\operatorname{senh} x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$	
$(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$	$(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$
$(\tanh x)' = (1 - \tanh^2 x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$	
$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$	$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$
$\cosh^2 x = \dfrac{\cosh(2x) + 1}{2}$	$\operatorname{senh}^2 x = \dfrac{\cosh(2x) - 1}{2}$

Cuadro 6.2: Fórmulas básicas de trigonometría hiperbólica

Ejemplo 6.5.1 Función impar en senh. Utililzando el cambio $t = \cosh x$ obtenemos:

$$\int \frac{1}{\operatorname{senh}^3 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{senh} x}{\operatorname{senh}^4 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{senh} x}{(\cosh^2 x - 1)^2}\, dx = \int \frac{dt}{(t^2 - 1)^2}.$$

También puede hacerse mediante una racional en e^x puesto que, con el cambio de variable $t = e^x$ tenemos:

$$\int \frac{1}{\operatorname{senh}^3 x}\, dx = \int \frac{2^3 e^{3x}}{(e^{2x} - 1)^3}\, dx = \int \frac{8t^3}{(t^2 - 1)^3} \frac{dt}{t} = \int \frac{8t^2}{(t^2 - 1)^3}\, dt.$$

6.6. Algunos tipos de funciones irracionales

A diferencia de lo que ocurre con las funciones racionales no existe un procedimiento general para el cálculo de primitivas de funciones irracionales. Incluimos aquí alguna situación particular en la que mediante cambios adecuados es posible transformarlas en primitivas de las consideradas en la sección 6.2.

6.6.1. (I$_1$) $\displaystyle\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right) dx$

En este caso R es una función racional de $k+1$ variables y $r_1, r_2 \dots, r_k$ son números racionales. El cambio de variable

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$$

siendo n el mínimo común múltiplo de los denominadores de $r_1, r_2 \dots, r_k$ permite reducirlas a las consideradas en la sección 6.2, como es fácil comprobar.

Ejemplo 6.6.1

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+1}}\, dx$$

El objetivo es eliminar las raíces cuadradas y cúbicas. Puesto que tenemos el binomio $x+1$ elevado a los exponentes $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, tomamos $n = 6$, ya que 6 es el mínimo común múltiplo de 2 y 3. Entonces hacemos

$$x + 1 = t^6, \qquad \text{que conduce a } x = t^6 - 1,\ dx = 6t^5\, dt,$$

con lo que la primitiva anterior se transforma en

$$\begin{aligned}\int \frac{t^6-1}{t^2+t^3} 6t^5\, dt &= 6\int \frac{t^9 - t^3}{t+1} dt = 6\int (t^8 - t^7 + t^6 - t^5 + t^4 - t^3)\, dt \\ &= 6\left(t^9/9 - t^8/8 + t^7/7 - t^6/6 + t^5/5 - t^4/4\right) + C.\end{aligned}$$

Y tras deshacer el cambio de variable se obtiene que la primitiva buscada es

$$6\left[\frac{(\sqrt[6]{x+1})^9}{9} - \frac{(\sqrt[6]{x+1})^8}{8} + \frac{(\sqrt[6]{x+1})^7}{7} - \frac{(x+1)}{6} + \frac{(\sqrt[6]{x+1})^5}{5} - \frac{(\sqrt[6]{x+1})^4}{4}\right] + C$$

Maxima puede calcular de forma directa la primitiva anterior mediante
`integrate(x/( (x+1)^(1/2) + (x+1)^(1/3)), x);`
El resultado proporcionado es

$$\frac{280\,(x+1)^{\frac{3}{2}} - 315\,(x+1)^{\frac{4}{3}} + 360\,(x+1)^{\frac{7}{6}} - 420\,(x+1) + 504\,(x+1)^{\frac{5}{6}} - 630\,(x+1)^{\frac{2}{3}}}{420}$$

Para ver que ese resultado se corresponde con el que hemos obtenido nosotros podemos indicar a Maxima que desarrolle la fracción inmediatamente anterior mediante el comando
`expand(%);`
obteniendo entonces la siguiente expresión

$$\frac{2\ (x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{3\ (x+1)^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{6\ (x+1)^{\frac{7}{6}}}{7} + \frac{6\ (x+1)^{\frac{5}{6}}}{5} - \frac{3\ (x+1)^{\frac{2}{3}}}{2} - x - 1$$

6.6.2. ($\mathbf{I}_2$) $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$

Donde m, n, p son números racionales se conocen con el nombre de *primitivas binomias* y pueden resolverse sólo en ciertos casos particulares, que pasamos a describir, mediante su reducción al modelo considerado en el apartado (I_1).

► $p \in \mathbb{Z}$

En este caso se trata de un ejemplo concreto de las primitivas irracionales consideradas en el apartado (I_1). En efecto, basta desarrollar el binomio $(a+bx^n)^p$ para darse cuenta de que se obtiene una primitiva de la forma

$$\int x^m\Big(a_1x^{r_1}+\cdots+a_nx^{r_n}\Big)\,dx$$

siendo los r_i números racionales. Es pues una primitiva de la familia (I_1), tomando $a=d=1$ y $b=c=0$.

► $p \notin \mathbb{Z}$

Entonces haremos el cambio de variable dado por $t=x^n$ que lo reduce a una primitiva del tipo

$$\int t^q(a+bt)^p\,dt.$$

Hay dos casos en los que esta primitiva puede transformarse al modelo considerado en el apartado (I_1) y son los siguientes:

- $q \in \mathbb{Z}$

  Es obvio que se trata de una primitiva del tipo considerado en el apartado (I_1).

- $q+p \in \mathbb{Z}$

  Si tal ocurre entonces

$$\int t^q(a+bt)^p\,dt = \int t^{q+p}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p\,dt$$

  y de nuevo se trata de una primitiva del tipo considerado en el apartado (I_1).

Ejemplo 6.6.2

$$\int \frac{x^5}{\sqrt[3]{1+x^3}}\,dx = \int x^5(1+x^3)^{-1/3}\,dx$$

De acuerdo con lo indicado, hacemos el cambio $t = x^3$, y en consecuencia $x = t^{1/3}$, $dx = (1/3)t^{-2/3}dt$ que tras sustituir conduce a

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\int \frac{t\,dt}{\sqrt[3]{1+t}} &= \frac{1}{3}\int \frac{(u^3-1)3u^2\,du}{u}\\ &= \frac{u^5}{5} - \frac{u^2}{2} + C\\ &= \frac{(1+x^3)^{5/3}}{5} - \frac{(1+x^3)^{2/3}}{2} + C.\end{aligned}$$

Ejemplo 6.6.3

$$\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^3}}\,dx = \int x^3(1+x^3)^{-1/3}\,dx$$

De acuerdo con lo indicado, hacemos $t = x^3$, y sustituyendo llegamos a ($q = 1/3$ $p = -1/3$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\int t(1+t)^{-1/3}\frac{dt}{t^{2/3}} &= \frac{1}{3}\int t^{1/3}(1+t)^{-1/3}\,dt\\ &= \frac{1}{3}\int \left(\frac{t}{1+t}\right)^{1/3} dt \quad \left[\frac{t}{1+t} = u^3 \Rightarrow t = \frac{u^3}{1-u^3}\right]\\ &= \frac{1}{3}\int u\frac{3u^2(1-u^3)+u^3 3u^2}{(1-u^3)^2}\,du = \int \frac{u^3}{(1-u^3)^2}\,du\end{aligned}$$

que es ya una función racional.

6.6.3. (I$_3$) $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

Aquí R representa a una función racional de dos variables y suponemos, obviamente, que $\sqrt{ax^2+bx+c}$ tiene sentido. Este tipo de primitivas se conoce con el nombre de *irracionales cuadráticas*.

Por calcular las primitivas de este tipo de funciones basta observar que mediante un adecuado cambio de variable afín (del tipo $t = \alpha x + \beta$) la primitiva propuesta da origen a una de las siguientes: $\int\sqrt{t^2-1}$, $\int\sqrt{t^2+1}$ o $\int\sqrt{1-t^2}$, dependiendo de los valores de a, b y c. Se trata ahora de calcular las primitivas de cada una de ellas.

$\displaystyle\int\sqrt{1-t^2}$.

Puede calcularse de forma sencilla mediante el cambio de variable

$$z = \operatorname{sen} t.$$

Ejemplo 6.6.4

$$\int \sqrt{x-x^2}\,dx$$

Tenemos la siguiente identidad

$$x-x^2=\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2\right)=\frac{1}{4}(1-(2x-1)^2)$$

con lo que

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{1-(2x-1)^2}\,dx \quad [t=2x-1]\\
&= \frac{1}{4}\int \sqrt{1-t^2}\,dt \quad [\operatorname{sen} u = t]\\
&= \frac{1}{4}\int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}\cos u\,du = \frac{1}{4}\int \cos^2 u\,du\\
&= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2u)\,du = \frac{1}{8}u+\frac{1}{16}\operatorname{sen} 2u + C\\
&= \frac{1}{8}(u+\operatorname{sen} u\cos u)+C\\
&= \frac{1}{8}\left(\operatorname{arcsen}(2x-1)+(2x-1)\sqrt{1-(2x-1)^2}\right)+C
\end{aligned}$$

$\int \sqrt{t^2-1}$.

Esta primitiva y la que sigue después pueden calcularse utilizando las funciones seno, coseno, tangente y cotangente hiperbólicos, que ya han sido definidas en el cuadro 6.2, en el que se incluyen también ecuaciones que establecen relaciones entre ellas. A la vista de dichas ecuaciones resulta evidente que la primitiva propuesta, haciendo el cambio de variable

$$t=\cosh z$$

se reduce a

$$\int \operatorname{senh}^2 z\,dz=\int \frac{\cosh 2z-1}{2}\,dz$$

cuya primitiva se calcula de forma sencilla.

Ejemplo 6.6.5

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-2x}\,dx &= \int \sqrt{(x-1)^2-1}\,dx \quad [x-1=t]\\ &= \int \sqrt{t^2-1}\,dt \quad [t=\cosh u]\\ &= \int \operatorname{senh}^2 u\,du = \frac{1}{2}\int (\cosh(2u)-1)\,du\\ &= \frac{1}{4}\operatorname{senh}(2u) - \frac{1}{2}u + C\\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x-1)^2-1}(x-1) - \operatorname{argcosh}(x-1)\right) + C\end{aligned}$$

$\int \sqrt{t^2+1}$

Utilizando las mismas ideas que antes, es claro que

$$t = \operatorname{senh} z$$

reduce la primitiva a

$$\int \cosh^2 z\,dz = \int \frac{\cosh 2z + 1}{2}\,dz$$

cuya primitiva, como antes, se calcula de forma sencilla.

Ejemplo 6.6.6

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4x^2+1}\,dx &= \int \sqrt{(2x)^2+1}\,dx \quad [2x=t]\\ &= \frac{1}{2}\int \sqrt{t^2+1}\,dt \quad [t=\operatorname{senh} u]\\ &= \frac{1}{2}\int \sqrt{\operatorname{senh}^2 u+1}\cosh u\,du = \frac{1}{2}\int \cosh^2 u\,du\\ &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)^2 du = \frac{1}{8}\int e^{2u}+2+e^{-2u}\,du\\ &= \frac{1}{16}(e^{2u}+4u-e^{-2u}) + C = \frac{1}{4}u + \frac{1}{8}\operatorname{senh} 2u + C\\ &= \frac{1}{4}\operatorname{argsenh}(2x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1+(2x)^2} + C\end{aligned}$$

La cuestión, tanto en éste como en el caso anterior, es expresar z, $\operatorname{senh} z$ y $\cosh z$ como funciones de t, es decir deshacer el cambio de variable, lo que requiere que los cambios de variable respectivos sean funciones biyectivas (uno a uno). En el caso de $t = \operatorname{senh} z$ así es, ya que la función es una biyección estrictamente creciente (pues su derivada $\cosh x$ cumple $\cosh x > 0$) e impar de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y se tendría $z := \operatorname{argsenh} t$, llamada la función argumento seno hiperbólico. En el caso de $t = \cosh z$ la función es par y es una biyección estrictamente creciente de $(0, +\infty)$ en sí mismo (procédase como antes) cuya función inversa recibe el nombre argumento coseno hiperbólico $z := \operatorname{argcosh} t$

6.7. Ejercicios

Resueltos

A lo largo del capítulo hay multitud de ejemplos. No añadiremos ningún otro.

Ejercicios propuestos

6.1) Calcule las siguientes primitivas elementales, en los intervalos donde las correspondientes funciones estén bien definidas:

$$\int x\sqrt[5]{x^3}\sqrt[7]{x^2}\,dx \qquad \int \frac{3\cdot 5^x+6\cdot 7^x}{2^{x+1}}\,dx \qquad \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$$

$$\int \cos^2 x\,dx \qquad \int e^{\operatorname{sen}^2 x}\operatorname{sen} 2x\,dx \qquad \int \frac{2\cdot x^3}{4+4\cdot x^8}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x\log_2 x}\,dx \qquad \int \frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4+2}}\,dx \qquad \int \frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{1+x^2}\,dx$$

$$\int \operatorname{sen} 3x\cos 3x\,dx \qquad \int \frac{(\log x)^3}{x}\,dx \qquad \int \sqrt{\frac{\operatorname{arcsen} x}{1-x^2}}\,dx$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx \qquad \int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx \qquad \int \frac{x^3}{x^8+5}\,dx$$

6.2) Calcule las siguientes primitivas:

$$\int (x^2+3x)2^x\,dx \qquad \int \mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen} x\,dx \qquad \int \log x\,dx$$

$$\int x^n\log x\,dx \qquad \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx \qquad \int \frac{\log^3 x}{x^2}\,dx$$

$$\int (\operatorname{arctg} x)^2 x\,dx \qquad \int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \qquad \int \frac{xe^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\int (\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})(\log x)^2\,dx \qquad \int \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 dx$$

6.3) Obténganse las siguientes fórmulas de recurrencia, siendo n un número entero positivo.

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx + \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}$$

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x}{\cos^{m+1} x}\,dx = \frac{1}{m}\frac{\operatorname{sen}^n x}{\cos^m x} - \frac{n}{m}\int \frac{\operatorname{sen}^{n-1} x}{\cos^{m-1} x}\,dx$$

6.4) Obtenga la siguiente fórmula de recurrencia

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$$

6.5) Calcule las primitivas de las siguientes funciones racionales:

$$\int \frac{x^4+x^2+2x+1}{x^4(x+1)^2}\,dx \qquad \int \frac{x^7+x^3}{x^4-1}\,dx \qquad \int \frac{3x^2+2x+4}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$$

$$\int \frac{2x^4-x^3+2}{x^2(x^2+1)^2}\,dx \qquad \int \frac{x^3-x^2+2x}{x^4+x^2+1}\,dx \qquad \int \frac{2x^2+x+1}{(x-1)^3}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x(x^3+1)}\,dx \qquad \int \frac{x-1}{x^2(x^2+1)^2}\,dx \qquad \int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx \qquad \int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx \qquad \int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+3)}\,dx$$

$$\int \frac{4x^2}{(x^2+3)^2}\,dx \qquad \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} \qquad \int \frac{2x^2+1}{(x-1)^6}$$

6.6) Calcule las siguientes primitivas:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \qquad \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x-1}} \qquad \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{(1+x)^2}$$

$$\int \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x}\,dx \qquad \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \qquad \int \sqrt{1+x+x^2}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} \qquad \int (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx \qquad \int \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+4}}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{(1+2x)^3\sqrt{1+x+x^2}} \qquad \int x^3\sqrt[3]{1+\sqrt{x^3}}\,dx \qquad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-2x^2)^5}}$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}\,dx \qquad \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx \qquad \int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$$

6.7) Calcule las siguientes primitivas

$$\int \operatorname{sen} 2x \cos 3x \, dx \qquad \int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x \, dx \qquad \int \frac{dx}{\cos x}$$

$$\int \cot^4 x \, dx \qquad \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx \qquad \int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{2 \operatorname{sen} x - \cos x + 5} \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos x} \qquad \int \frac{dx}{\cos^3 x}$$

$$\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x} \, dx$$

6.8) Calcule las siguientes primitivas:

$$\int \frac{dx}{a^2 e^x + b^2 e^x} \, dx \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x} - e^x + 1} \, dx \qquad \int \frac{1 + \operatorname{senh} x}{1 + \cosh x} \, dx$$

$$\int \operatorname{senh}^2 x \, dx$$

6.9) Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 16x + 12}}, \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{1 + x^4}} \, dx$$

6.10)

$$\int \frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}, \qquad \int \frac{\operatorname{arc\,sen} x \, dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}$$

6.11)

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x} \, dx$$

6.12)

$$\int \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x})}$$

Siempre que sea posible, utilice MAXIMA para comparar los resultados obtenidos manualmente con los proporcionados por el ordenador.