Tema 3a: Cálculo diferencial de funciones de varias variables I

1. Funciones de varias variables. Límites. Continuidad

1.1. Funciones de varias variables

Definición: Llamaremos **función real de varias variables** (o **campo escalar**) a toda función

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Y llamaremos **función vectorial de varias variables** (o **campo vectorial**) a toda función

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

En ambos casos se dice que f es una función de n variables.

Ejemplos:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x, y) = x^2 y + e^{\cos y} \log x - 3$$
es una función real de 2 variables.

2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x, y, z) = \cos(x - y - 2) + \sqrt{z^5 - 1}\tan(e^{x+y})$$
es una función real de 3 variables.

3. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = e^{\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}}$$
es una función real de n variables.

4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$f(x, y, z) = (x - y + z - 20, z\log[e^{zy} - 7])$$
es una función vectorial de 3 variables y 2 coordenadas.

5. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ dada por
$$f(x, y, z, t) = (x - y, x\cos z, t^2 + e^y, 0, 3 - xyzt)$$
es una función vectorial de 4 variables y 5 coordenadas.

Definición: Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (una función vectorial). Llamaremos **funciones coordenadas** de f a las funciones

$$f_1, f_2, ..., f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

que verifican que

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (f_1(x_1, x_2, ..., x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_n))$$

En esa situación pondremos

$$f = (f_1, f_2, ..., f_m)$$

Observación: Para el ejemplo 4 anterior se tiene que

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

tiene por funciones coordenadas

$$f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

dadas por

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= x - y + z - 20 \\ f_2(x, y, z) &= z \tan[e^{xy}] \end{aligned}$$

Para el ejemplo 5 anterior se tiene que

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$$

tiene por funciones coordenadas

$$f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

dadas por

$f_1(x, y, z, t) = x - y$	$f_2(x, y, z, t) = x \cos z$	$f_3(x, y, z, t) = t^2 + e^y$

$f_4(x, y, z, t) = 0$	$f_5(x, y, z, t) = 3 - xyzt$

Igual que en el caso de funciones reales de una variable real ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) se entiende por **dominio** de una función de varias variables al conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ en el cual tienen sentido todas las expresiones que definen a la función. Si $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ es una función vectorial se tiene además que

$$Dom f = Dom f_1 \cap Dom f_2 \cap ... \cap Dom f_m$$

De todos modos, al igual que ocurría con funciones reales de variable real, el dominio puede estar restringido sin necesidad de ser el dominio máximo posible.

Observación: En el ejemplo 1 anterior el dominio está formado por todos los puntos (x, y) que cumplen que $x > 0$.

En el ejemplo 2 el dominio está formado por todos los puntos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ que verifican

$z^5 - 1 \geq 0$ y $\cos(e^{x+y}) \neq 0$, simultáneamente.

En el ejemplo 3 el dominio es todo $\mathbb{R}^n$, así como en el ejemplo v).

Finalmente en el ejemplo iv) el dominio está formado por todos los puntos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ que verifican $e^{zy} > 7$.

El dominio de la función

$$f(x, y) = \cos(\frac{1}{x^2 + y^2})$$

es todo $\mathbb{R}^2$ salvo el punto $(0, 0)$ (observar que es el único punto que hace nula la suma de cuadrados $x^2 + y$).

Para la función

$$g(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

el dominio es

$$Domg = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } xy \neq 0\},$$

en definitiva todo $\mathbb{R}^2$ salvo los ejes coordenados $x = 0$ e $y = 0$.

Y el dominio de la función $h(x, y) = (\frac{x^2}{y}, \log(x - y), \sqrt{x^2 - 1})$ es

$$Domh = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : y \neq 0, x - y > 0, x^2 - 1 \geq 0\}$$

La **gráfica** de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es el siguiente conjunto de puntos de $\mathbb{R}^{n+m}$

$$\{(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n)) \in \mathbb{R}^{n+m} : (x_1, x_2, ..., x_n) \in Domf\}$$

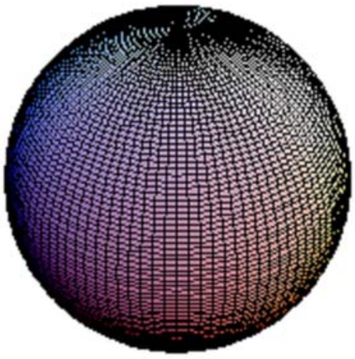
Casos donde puede visualizarse la gráfica:

- Una función real de variable real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En este caso la gráfica es una curva en $\mathbb{R}^2$, que está formada por todos los puntos de la forma $(x, f(x))$, donde x recorre el dominio de f. Ésta es la situación que hemos analizado en el Tema 8 de la asignatura.

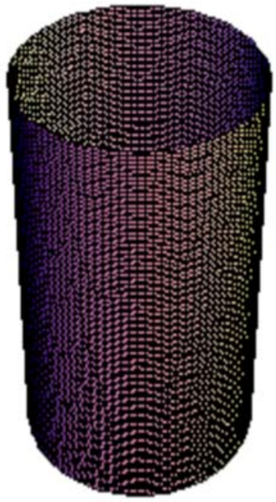
- Una función real de dos variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. En este caso la gráfica es una **superficie**, que está formada por todos los puntos de la forma $(x, y, f(x, y))$, donde (x, y) recorre el dominio de f. Ésta será la situación que analizaremos en el presente tema y en los restantes.

- Una función vectorial de una variable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, cuando $n = 2, 3$. En este caso tenemos lo que se denomina una curva parametrizada en $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$. Ésta es una situación especial que se visualiza de otro modo que no vamos a tratar con detalle aquí.

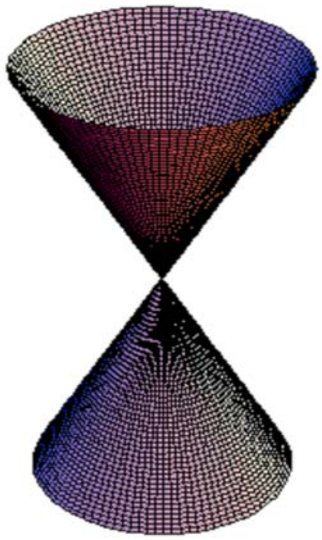
A continuación vemos algunas superficies (aquí están dadas mediante una ecuación implícita):



Esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$



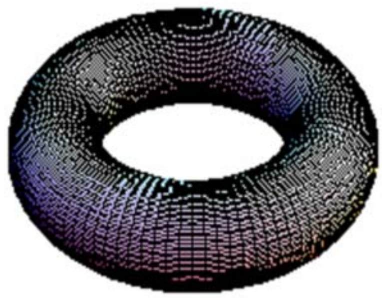
Cilindro $x^2 + y^2 = 1$



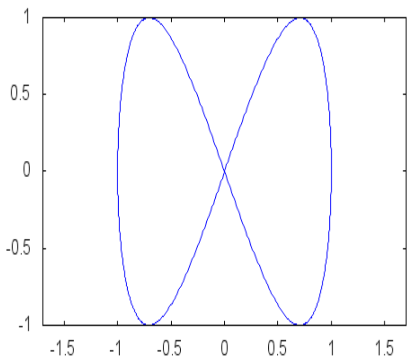
Cono $z^2 = x^2 + y^2$

Paraboloide $z = x^2 + y^2$

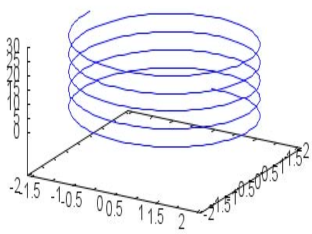
Silla de montar $z = x^2 - y^2$



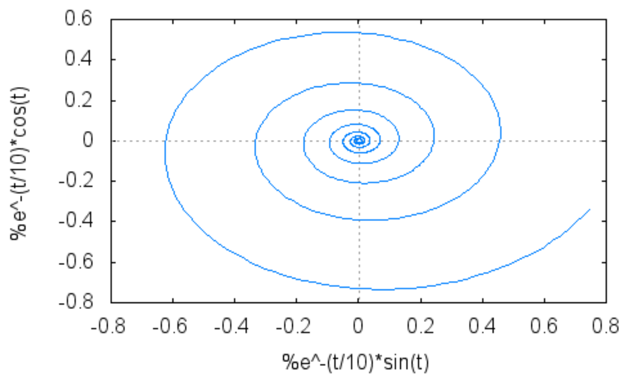
Toro $z^2 = 1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2$



La figura ocho



La hélice circular



Una espiral

Debido a la complejidad existente en general a la hora de abordar el problema de la representación gráfica de una superficie $z = f(x, y)$ se hace necesario otro recurso que facilite en buena medida esta labor. Así podemos utilizar las **curvas de nivel**, que son las proyecciones sobre el plano OXY de los puntos de la superficie que están a cierta altura constante (para cada altura k al hacer la proyección sobre el plano OXY de la superficie obtenemos la curva de nivel $\{(x, y) : f(x, y) = k\}$).

1.2. Límite de funciones de varias variables

La idea intuitiva de límite es similar a la del caso de funciones reales de una variable real, con las generalizaciones correspondientes. En principio la idea inicial que tenemos de límite consiste, como ocurría para las funciones reales de una variable, es sustituir en el punto.

Pero el concepto de límite para funciones de varias variables es extremadamente complicado. Y lo cierto es que no es concepto fundamental para nuestras necesidades. Por ello omitiremos aquí el desarrollo de toda la teoría relacionada, quedándonos únicamente con lo estrictamente necesario.

Ejemplos:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+y^2-2}{1+x\cos y} = \frac{-1}{1} = -1$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,\pi)} [sen\ y - 3\cos(yx)]^2 = [sen\ \pi - 3\cos(-2\pi)]^2 = [0-3]^2 = 9$

3. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,-1,0)} x^2y^3(z+2) - 4 = 1^2(-1)^3 \cdot 2 - 4 = -2 - 4 = -6$

   De modo similar se define el límite de una **función vectorial** de varias variables
   $$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
   sólo que L no es un número real sino un vector
   $$L = (L_1, L_2, ..., L_m) \in \mathbb{R}^m$$

4. Para $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por
   $$f(x, y, z) = (x - y + z - 20, z\tan[\frac{\pi}{4}e^{zy}])$$
   se tiene que
   $$\begin{aligned}
   \lim_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} f(x, y, z) &= \lim_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} (x - y + z - 20, z\tan[\frac{\pi}{4}e^{zy}]) = \\
   &= (\lim_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} [x - y + z - 20], \lim_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} z\tan[\frac{\pi}{4}e^{zy}]) = \\
   &= (-20, -\tan\frac{\pi}{4}) = (-20, -1)
   \end{aligned}$$

5. $$\lim_{(x,y)\to(3,0)} (\frac{x}{e^y}, \frac{y-1}{3x}, 5) = (\frac{3}{1}, \frac{-1}{9}, 5) = (3, -\frac{1}{9}, 5)$$

   También es posible que aparezcan **infinitos**, generalizando la definición dada para funciones reales de una variable:

6.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+1}{y} = \frac{1}{0} = \infty$	$\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \frac{1+x}{(x-2)^2+y^2} = \frac{3}{0} = +\infty$	$\lim\limits_{(x,y)\to(1,-3)} (2y, \frac{3}{x-1}) = \infty$

7.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} e^{\frac{-y}{x^2}} = e^{-\infty} = 0$$

1.3. Continuidad de funciones de varias variables

La definición de continuidad es enteramente análoga al caso de funciones de una variable real.

Diremos que una función f es **continua** en un punto x_0 cuando el punto está en el dominio, la función tiene límite (finito) en el punto y el valor de la función y de su límite en el punto coinciden. Es decir:

1) $x_0 \in Domf$ $(\exists\ f(x_0))$.

2) Existe el límite de f en x_0 (y es finito).

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

El estudio de la continuidad de una función en un punto se reduce fundamentalmente al estudio de la existencia y, en su caso, el valor del límite de la función en el punto. Además, al igual que pasaba con los límites, el estudio de la continuidad de una función vectorial se reduce al de sus funciones coordenadas pues una **función vectorial es continua** si y sólo si **son continuas sus funciones coordenadas**.

Además, **las funciones usuales** (constantes, polinomios, exponenciales, trigonométricas, logaritmos, etc.) **son funciones continuas** en todo punto de su dominio. También al igual que pasaba con las funciones de una variable real, las **operaciones usuales** que se hacen **con funciones continuas** dan como resultado una función continua: sumas, restas, multiplicación por escalares, composición de funciones, productos, cocientes con denominador no nulo, y otras operaciones usuales. Así por ejemplo serán funciones continuas, en todo punto de su dominio, las siguientes:

Ejemplos:

1. $f_1(x,y) = \frac{3xy+x^6}{e^{\frac{x}{y}}} + 5(x^2+1)^x$ (continua en $\{(x,y) : y \neq 0\}$).

2. $f_2(x,y) = (\frac{sen(x-y)}{x^2+y^2} - \log(x+y^2), e^{\tan(x+1)})$ (continua en $\{(x,y) : x+y^2 > 0, \cos(x+1) \neq 0\}$).

Observación: En ocasiones ocurre que por problemas de dominio no podemos plantear el límite a través de $\mathbb{R}^2$, sólo podemos plantearlo a través del dominio. Así ocurre por ejemplo con la función $f(x,y) = \sqrt{x-y}$ cuando planteamos la existencia del límite en el punto $(0,0)$: éste sólo puede plantearse a través del dominio, que es el conjunto $\{(x,y) : x \geq y\}$. En este caso el resultado del límite es 0. Entonces podemos interpretar que la función, que está definida en $(0,0)$ tomando el valor 0, es continua en dicho punto, por supuesto, continua a través del dominio. Admitiremos pues dentro de la definición de continuidad tal generalidad (que denominaremos **continuidad a través de un conjunto**), especialmente en el caso en que el límite lo realicemos a través del dominio.

A continuación, y para finalizar el tema, damos la versión en varias variables del **Teorema de Weierstrass** que generaliza el caso de una variable:

Teorema: Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función continua en $\Omega \subseteq Domf$ y Ω es compacto entonces $f(\Omega)$ es también compacto.

Corolario: Si la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en el conjunto compacto $\Omega \subseteq Domf$, entonces existen $x_0, y_0 \in \Omega$ tales que

$$f(x_0) = \text{máx}\{f(x) : x \in \Omega\}$$

$$f(y_0) = \text{mín}\{f(x) : x \in \Omega\}$$

2. Cálculo diferencial de funciones de varias variables I

El concepto de derivabilidad en funciones reales de una variable real se generaliza a funciones de varias variables con la diferenciabilidad. Comenzaremos antes analizando algunas nociones más sencillas que van relacionadas.

2.1. Derivadas direccionales, derivadas parciales

El concepto de derivada de una función en un punto, que veíamos para funciones de 1 variable, representaba el incremento de esa función (por cada unidad de variable) en ese punto. Esto se generaliza a funciones de varias variables con el concepto que vemos a continuación: derivada en la dirección de algún vector (derivada direccional). Ésta representa la derivada (incremento) en la dirección que marca dicho vector.

Definición: Partimos de lo siguiente:

una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	un punto $x_0 = (a_1, ..., a_n) \in Domf$	$v = (v_1, ..., v_n)$ un vector no nulo de $\mathbb{R}^n$

Llamaremos **derivada direccional** de f en x_0 en la dirección del vector v (denominada también derivada con respecto a v) a

$$D_v f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1 + tv_1, ..., a_n + tv_n) - f(a_1, ..., a_n)}{t}$$

La derivada direccional anterior puede realizarse de modo equivalente cogiendo la función

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	definida por $g(t) = f(x_0 + tv)$	calculando $g'(0)$

Nota: Para ser rigurosos diremos que la definición de derivada direccional se suele definir para vectores de módulo 1. Eso debe ser así, al menos para que sea correcta la interpretación de dicha derivada como el incremento de la función en la dirección del vector usado. Pero para una mejor simplicidad de los ejemplos que tratamos pondremos vectores que no tienen por qué cumplir dicho requisito. No obstante añadiremos que para la mayor parte de las funciones que vamos a manejar, las funciones diferenciables, esto no representa problema porque, como veremos en el tema, al satisfacerse la linealidad esto permitirá dividir después entre la norma del vector, para que tenga módulo 1.

Ejemplo: Hallemos la derivada direccional

de la función $f(x,y) = x^2 - y^2$	en el punto $x_0 = (3,2)$	en la dirección del vector $v = (1,-1)$

Ésta vale

$$\begin{aligned} D_v f(x_0) &= D_{(1,-1)}f(3,2) = \lim_{t\to 0}\frac{f[(3,2)+t(1,-1)] - f(3,2)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(3+t,2-t)-5}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{(3+t)^2-(2-t)^2-5}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{10t}{t} = \lim_{t\to 0}10 = 10 \end{aligned}$$

Haciéndolo de la otra manera tendríamos que definir

$$g(t) = f(x_0+tv) = f(3+t,2-t) = (3+t)^2-(2-t)^2 = 5+10t$$

y hallar $g'(0)$.

Como $g'(t) = 10$ concluimos que $D_{(1,-1)}f(3,2) = g'(0) = 10$

Ejemplo: Hallemos la derivada direccional

de la función $f(x,y) = x^2y - xe^y$	en el punto $x_0 = (x,y)$	en la dirección de vector $v = (1,0)$

Ésta vale

$$D_{(1,0)}f(x,y) = \lim_{t\to 0}\frac{f[(x,y)+t(1,0)]-f(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y)-(x^2y-xe^y)}{t} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{t\to 0}\frac{(x+t)^2y-(x+t)e^y-x^2y+xe^y)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(x^2+2xt+t^2)y-xe^y-te^y-x^2y+xe^y)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{x^2y+2xty+t^2y-te^y-x^2y}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{2xty+t^2y-te^y}{t} = \lim_{t\to 0}2xy+ty-e^y = 2xy-e^y \end{aligned}$$

Esto es lo que se conoce como derivada parcial de f con respecto a x (que veremos a continuación)

Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$	$x_0 = (a_1,...,a_n)\in Domf$	y $C = \{e_1,e_2,...,e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$

(recordemos que cada e_i tiene todas las coordenadas nulas salvo la i-ésima que vale 1) Entonces para cada $i = 1,2,...,n$ la derivada direccional respecto del vector e_i es

$$\begin{aligned} D_{e_i}f(x_0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+te_i)-f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f[(a_1,....,a_n)+t(0,0,...,0,1,0,...,0)]-f(a_1,...,a_n)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(a_1,...,a_i+t,...,a_n)-f(a_1,...,a_n)}{t} \end{aligned}$$

y la llamaremos **derivada parcial** i-ésima de f ó (suponiendo que designamos por x_i a la variable i-ésima del espacio) **derivada parcial de f con respecto a** x_i en el punto x_0. Para designar a esta derivada parcial pueden utilizarse las siguientes **notaciones:**

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$	$D_i f(x_0)$	$f_{x_i}(x_0)$	$f'_{x_i}(x_0)$

Por ejemplo, para una función f de dos variables (x, y) las derivadas parciales en el punto x_0 podrían denotarse así

$\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0)\}$	$\{D_1 f(x_0), D_2 f(x_0)\}$	$\{f_x(x_0), f_y(x_0)\}$	$\{f'_x(x_0), f'_y(x_0)\}$

Y para una función f de tres variables (x, y, z) las derivadas parciales en el punto x_0 podrían denotarse así:

$\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0)\}$	$\{D_1 f(x_0), D_2 f(x_0), D_3 f(x_0)\}$	$\{f_x(x_0), f_y(x_0), f_z(x_0)\}$	$\{f'_x(x_0), f'_y(x_0), f'_z(x_0)\}$

Ejemplo: Calculemos las derivadas parciales de la función

$f(x, y) = \frac{x-y}{x^2+1}$	en el punto $x_0 = (-2, 3)$

Éstas son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-2,3) = D_{(1,0)}f(-2,3) = \lim_{t\to 0}\frac{f[(-2,3)+t(1,0)] - f(-2,3)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(-2+t,3) - (-\frac{5}{5})}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{-2+t-3}{(-2+t)^2+1} + 1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t-5}{t^2-4t+5} + \frac{t^2-4t+5}{t^2-4t+5}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2-3t}{t^2-4t+5}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2-3t}{t(t^2-4t+5)} = \lim_{t\to 0}\frac{t-3}{t^2-4t+5} = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-2,3) = D_{(0,1)}f(-2,3) = \lim_{t\to 0}\frac{f[(-2,3)+t(0,1)] - f(-2,3)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(-2,3+t)+1}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{-2-(3+t)}{(-2)^2+1} + 1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{-5-t}{5} + \frac{5}{5}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{-t}{5}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}$$

Habitualmente, calcular las derivadas parciales es más sencillo del siguiente modo:

La derivada parcial de f con respecto a la variable x_i en el punto $x_0 = (a_1, ..., a_n)$ puede hallarse calculando la derivada de la función de una variable

$$F_i(x_i) = f(x_1, ..., x_n),$$

en la que dejamos fijas las variables distintas de x_i, en el punto x_0.

Ejemplo: Hallemos las derivadas parciales de la función

$f(x, y) = \frac{2x-y}{x+3}$	en el punto $x_0 = (-1, 0)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2(x+3) - 1(2x-y)}{(x+3)^2} = \frac{6+y}{(x+3)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-(x+3) - 0(2x-y)}{(x+3)^2} = \frac{-x-3}{(x+3)^2} = -\frac{1}{x+3}
\end{aligned}$$

por tanto	$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0)=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$	$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0)=-\frac{1}{2}$

Nota: Por supuesto que también pueden calcularse estas derivadas parciales como derivadas direccionales,.

Ejemplo: Hallemos las derivadas parciales de la función

$f(x,y,z)=e^{2x+3y}\cos z$	en cualquier punto (x,y,z)

$\frac{\partial f}{\partial x}=2e^{2x+3y}\cos z$	$\frac{\partial f}{\partial y}=3e^{2x+3y}\cos z$	$\frac{\partial f}{\partial z}=-e^{2x+3y}senz$

Ejemplo: Las derivadas parciales de la función $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z)=\frac{2x-y+1}{3x+4y-5z}$$

son

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{2\cdot(3x+4y-5z)-(2x-y+1)\cdot 3}{(3x+4y-5z)^2}=\frac{11y-10z-3}{(3x+4y-5z)^2} \\ f_y &= \frac{-15x+5z-4}{(3x+4y-5z)^2} \\ f_z &= \frac{10x-5y+5}{(3x+4y-5z)^2} \end{aligned}$$

Para una función vectorial

$$f=(f_1,f_2,...,f_n):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$$

pueden definirse de modo similar sus derivadas direccionales y parciales, obteniendo como resultado vectores de $\mathbb{R}^m$ (en vez de escalares) y pudiendo hallarse coordenada a coordenada a partir de las funciones coordenadas $f_1,f_2,...,f_n$.

Ejemplo: Las derivadas parciales de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y)=(x-y,x^2e^y,\cos xy) \qquad \text{son}$$

$f_x=(1,2xe^y,-ysenxy)$	$f_y=(-1,x^2e^y,-xsenxy)$

Ejemplo: Calcular la derivada direccional de la función

$f(x,y)=(x^2-2y+e^{y-x},3+senx)$	en el punto $x_0=(0,-2)$	en la dirección de $v=(2,1)$

Sea

$$g(t)=f[(0,-2)+t(2,1)]=f(2t,t-2)=(4t^2-2[t-2]+e^{-t-2},3+sen2t)$$

luego

$$g'(t)=(8t-2-e^{-t-2},2\cos 2t)$$

Entonces esta derivada vale

$$g'(0)=(-2-e^{-2},2)$$

2.2. Plano tangente a una superficie

Recordemos que la derivada de una función derivable

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

en un punto x_0 podía ser interpretada como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = x_0$. Veamos qué interpretación geométrica podemos darle a las derivadas parciales. Supongamos que tenemos una función real de dos variables f y que tomamos la superficie determinada por la ecuación $z = f(x, y)$. Haciendo uso de las derivadas parciales de f es posible obtener el **plano tangente** a la superficie en un punto (a, b), también se dice a veces en el punto $(a, b, f(a, b))$, cuya ecuación es

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot (x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot (y-b)$$

Y la recta normal a la superficie en dicho punto tiene por ecuación vectorial

$$(x,y,z) = (a,b,f(a,b)) + t(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1)$$

Ejemplo: Hallemos el plano tangente de la superficie

$z = 3x^2 - ysenx$	en el punto $(\pi, 0)$

En este punto la coordenada z vale $3\pi^2$ y como la función que define la superficie es

$$f(x,y) = 3x^2 - ysenx \qquad \text{tenemos que}$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - y\cos x$	$\frac{\partial f}{\partial y} = -senx$

Así la ecuación de nuestro plano tangente es

$$z = 3\pi^2 + 6\pi \cdot (x-\pi) + 0 \cdot (y-0) \qquad \text{es decir} \qquad z = 3\pi^2 + 6\pi \cdot (x-\pi)$$

Y la recta normal a la superficie en dicho punto tiene por ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= \pi + 6\pi t \\ y &= 0 \\ z &= 3\pi^2 - t \end{aligned}$$

2.3. Derivadas parciales de orden superior

Para una función

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

también puede plantearse la existencia de **derivadas parciales segundas**, siendo éstas las derivadas parciales de las derivadas parciales. Denotaremos por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \qquad \text{o abreviadamente} \qquad f_{x_i x_j}$$

a la derivada parcial segunda de f con respecto (primero) de x_i y (después) de x_j. Si $i = j$ pondremos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

De modo análogo se extiende el concepto para derivadas parciales terceras o de otro orden. También en el caso de las derivadas terceras, cuartas, etc. pueden utilizarse abreviaturas del tipo

$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}$	$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j}$

cuando se deriva más de una vez con respecto de alguna variable.

Por ejemplo, para una función de dos variables las derivadas parciales segundas serían

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

y las terceras

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$	$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$	$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$	$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$	$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$	$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$	$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$	$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$

Si f es una función para la que existen todas las derivadas parciales de orden k y son continuas en un abierto Ω diremos que es de clase $C^k(\Omega, \mathbb{R})$ o simplemente **de clase C^k en Ω** (diremos que f es **de clase C^∞** cuando existan las derivadas parciales de todo orden y sean continuas, y de clase C^0 cuando la función sea continua). De hecho, las funciones usuales y las operaciones que habitualmente realizamos con ellas son funciones de clase C^∞ en todo punto del interior del dominio. Por ejemplo, así ocurre con la función

$$f(x, y) = x^2 e^{y+x} - sen[\log(\frac{y}{x})]$$

en todo punto en que $x \neq 0$ e $\frac{y}{x} > 0$.

Surge ahora la cuestión de si se cumplirá **la igualdad de las derivadas cruzadas**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Aunque esto no es cierto siempre en los casos que habitualmente manejaremos sí. Pues **basta con que la función sea de clase C^2** para poder asegurar esto.

Ejemplo: Para la función

$$f(x, y) = xe^{x+2y}$$

hallemos las derivadas de primer, segundo y tercer orden. Las de primer orden son

$f_x = e^{x+2y} + xe^{x+2y} = (1+x)e^{x+2y}$	$f_y = 2xe^{x+2y}$

las de segundo orden son

$f_{xx} = e^{x+2y} + (1+x)e^{x+2y} = (2+x)e^{x+2y}$	$f_{xy} = f_{yx} = 2(1+x)e^{x+2y}$	$f_{yy} = 4xe^{x+2y}$

y las de tercer orden son

$f_{xxx} = (3+x)e^{x+2y}$	$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx} = 2(2+x)e^{x+2y}$	$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx} = 4(1+x)e^{x+2y}$	$f_{yyy} = 8xe^{x+2y}$

Nota: Observemos que hemos utilizado que f es C^∞ para justificar las igualdades

$$f_{xy} = f_{yx}, f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}, f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

2.4. Diferenciabilidad

Para funciones de varias variables no tiene sentido el concepto de derivabilidad, tal y como se veía para funciones de una variable, por lo que se hace necesario plantear otro que, en el caso de funciones de una variable, coincida con éste. Dicho concepto es la diferenciabilidad. Para definir este concepto hay que hallar el límite de cierta función de varias variables, construida a partir de la función original: Diremos que una función

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

es **diferenciable** en x_0 cuando existe una aplicación lineal

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

de modo que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0) - T(x)}{\|x\|} = 0$$

donde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$). Cuando esto ocurre la aplicación lineal T que cumple esa propiedad se denomina **la diferencial de f en el punto** x_0 y usaremos la notación

$$T = df(x_0) \qquad \text{ó} \qquad Df(x_0)$$

De modo análogo se define el concepto de diferenciabilidad de una función vectorial

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

dividiendo por $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ en cada coordenada, y ocurriría que la diferencial sería una aplicación lineal

$$df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

y el límite anterior debería ser el vector $0 \in \mathbb{R}^m$.

Al igual que la continuidad, los límites, las derivadas parciales y direccionales, el problema de estudiar la diferenciabilidad para funciones vectoriales se reduce al de funciones reales ($m = 1$)

Propiedad: Una función

$$f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

es diferenciable en un punto x_0 si y sólo si $f_1, ..., f_m$ (**las funciones coordenadas** de f) **son diferenciables** en x_0. En esta situación se tiene además que

$$df(x_0) = (df_1(x_0), ..., df_m(x_0))$$

es decir, la diferencial se calcula coordenada a coordenada. Además, como veremos más adelante, esto podrá simplificarse gracias a lo que llamaremos matriz jacobiana.

A continuación ponemos algunas propiedades de la diferencial:

1. **La diferencial** de una función diferenciable en un punto **es única**.

2. Toda función **diferenciable** en un punto **es continua** en ese punto (por lo que toda función que no sea continua no es diferenciable).

3. **(Teorema de la función compuesta o Regla de la Cadena)** Si

   $$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ es una función diferenciable en } x_0 \text{ y}$$

   $$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \text{ es diferenciable en } f(x_0)$$

   entonces la función compuesta $g \circ f$ es diferenciable en x_0. Además

   $$d(g \circ f)(x_0) = dg[f(x_0)] \circ df(x_0)$$

   Nota: Más adelante veremos cómo determinar en la práctica la diferencial de la función compuesta, especialmente con la matriz jacobiana.

4. Las **funciones usuales** (constantes, polinomios, exponenciales, logaritmos, trigonométricas, etc.), así como las que son combinación de ellas mediante las operaciones básicas (suma, resta, producto, cociente, composición, etc.) resultan diferenciables en todos los puntos posibles (en los puntos del interior del dominio).

A continuación vemos la relación que hay entre la diferenciabilidad de una función y la existencia de derivadas direccionales (en particular de derivadas parciales):

Propiedad: Si una función

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

es diferenciable en un punto x_0 entonces existe la derivada direccional $D_v f(x_0)$ con valor finito para cualquier vector no nulo $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. En particular **existen las derivadas parciales de f en x_0 con valor finito**. Además, **en esta situación se tiene que**

$$(*) \qquad D_v f(x_0) = df(x_0)(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot v_i$$

En particular para cada vector e_i de la base canónica $\mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = df(x_0)(e_i)$$

Nota: Veamos aquí la fórmula anterior (*) para el caso de 2 variables:

$$D_{(v_1,v_2)}f(a,b) = df(a,b)(v_1,v_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot v_2$$

Y para 3 variables:

$$D_{(v_1,v_2,v_3)}f(a,b,c) = df(a,b,c)(v_1,v_2,v_3) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)\cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)\cdot v_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\cdot v_3$$

Ejemplo: Hallemos la diferencial de la función

$$f(x,y) = x^2e^{xy}$$

en el punto $(-1,0)$.

En primer lugar tenemos que $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = (2x+x^2y)e^{xy}}\,\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = x^3e^{xy}}$

luego $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0) = -2}\,\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0) = -1}$

Entonces $\quad df(-1,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

es una aplicación lineal tal que para cada vector $(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ se tiene que

$$df(-1,0)(v_1,v_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(-1,0)\cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,0)\cdot v_2 = -2v_1 - v_2$$

Ejemplo: Hallemos la diferencial de la función

$$f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$$

en el punto $(-1,2)$.

En primer lugar tenemos que $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = (1+2x^2)e^{x^2+y^2}}\,\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = 2xye^{x^2+y^2}}$

luego $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = 3e^5}\,\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = -4e^5}$

Entonces $\quad df(-1,2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

es una aplicación lineal tal que para cada vector $(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ se tiene que

$$df(-1,2)(v_1,v_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(-1,2)\cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2)\cdot v_2 = 3e^5v_1 - 4e^5v_2$$

Si bien toda función diferenciable posee derivadas parciales, hay funciones que poseen derivadas parciales y sin embargo no son diferenciables, incluso hay casos en los que la función no es ni siquiera continua.

Corolario: Si alguna de las derivadas parciales o direccionales no existe (o tiene valor infinito) entonces la función no es diferenciable.

Las funciones usuales resultarán ser diferenciables debido a este resultado:

Propiedad: Supongamos que tenemos **una función** f **que es de clase** C^1 (es decir, con derivadas parciales de orden 1 continuas) en x_0. Entonces f **es diferenciable** en x_0.

En resumen **si quisiéramos estudiar la diferenciabilidad lo que debemos hacer** por regla general **es**:

1) Si **a simple vista se ve que** f **es de un tipo concreto** (polinómica, exponencial, trigonométrica, etc. o combinación de éstas), eso significará que la función es **de clase** C^1 (es decir tiene derivadas parciales de primer orden continuas) luego **será diferenciable**.

2) Si ya hemos analizado o si se puede ver puede determinar fácilmente que **la función no es continua**, en ese caso **no será diferenciable** (si no hemos determinado aún la no continuidad de la función, este criterio no es aconsejable con carácter general, pues a veces es más costosa esta labor que realizar el análisis de los criterios que vienen a continuación).

3) Si **no existe (con valor finito) alguna de las derivadas parciales** (de primer orden) de f en x_0 sabemos ya que f **no es diferenciable** en x_0.

2.5. Matriz jacobiana

Sea f una función diferenciable en un punto x_0. Como ocurre con toda aplicación lineal podemos calcular la matriz asociada a la diferencial $df(x_0)$ respecto de diversas bases. Concretamente nos interesamos por la matriz asociada respecto de las bases canónicas:

Propiedad:

$$\text{Si} \qquad f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

es una función diferenciable en un punto x_0 entonces

$$df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

es una aplicación lineal y tendría una matriz asociada respecto de las bases canónicas **de** $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Esta matriz se llamará **matriz jacobiana de** f **en** x_0 (ya la mostramos a continuación) y la denotaremos por

$$Jf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

o, de modo abreviado (y más sencillo)

$$Jf(x_0) = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{array} \right)$$

Mediante la matriz jacobiana podemos obtener la imagen de cualquier vector $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ a través de la aplicación lineal $df(x_0)$ mediante la fórmula ya conocida para aplicaciones lineales

$$df(x_0)(v) = Jf(x_0) \cdot v$$

donde estamos poniendo el vector v en columna.

A partir de esta fórmula obtenemos ésta otra ya conocida

$$df(x_0)(v_1, ..., v_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \cdot v_n$$

Además cuando la función f es real ($f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) la matriz jacobiana suele ponerse en forma de vector (fila o columna) y se le denomina también **vector gradiente de** f **en** x_0, denotándolo también así .

$$\bigtriangledown f(x_0) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0))$$

Ejemplo: Calcular la matriz jacobiana de la función

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (\log[xy], zx + y^2, \dfrac{z - y}{z - x} + \dfrac{\pi}{4} - 1)$

en cualquier punto (x, y, z) de su dominio.

Ésta es $Jf(x, y, z) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \end{array} \right)$

Tenemos que

$\frac{\partial f}{\partial x} = (\frac{y}{xy}, z, \frac{z-y}{(z-x)^2}) = (\frac{1}{x}, z, \frac{z-y}{(z-x)^2})$	$\frac{\partial f}{\partial y} = (\frac{x}{xy}, 2y, \frac{-1}{z-x}) = (\frac{1}{y}, 2y, \frac{-1}{z-x})$	$\frac{\partial f}{\partial z} = (0, x, \frac{y-x}{(z-x)^2})$

Así la matriz es $Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & 0 \\ z & 2y & x \\ \frac{z-y}{(z-x)^2} & \frac{-1}{z-x} & \frac{y-x}{(z-x)^2} \end{pmatrix}$

Para finalizar vamos a hallar la matriz jacobiana en el punto $P = (1, 1, \frac{\pi}{3} - 1)$ (se utilizará en el Ejemplo 2.7). Sale

$$Jf(P) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{\pi}{3} - 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{\frac{\pi}{3}-2} & \frac{-1}{\frac{\pi}{3}-2} & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Hallar la matriz jacobiana en el punto $Q = (0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$ de la función

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x_1, x_2, x_3) = (sen[x_1x_2], \cos[2x_3 + 3x_2] \cos x_1)$

Ésta es $Jg(Q) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial g}{\partial x_1}(Q) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(Q) & \frac{\partial g}{\partial x_3}(Q) \end{array} \right)$ donde

En primer lugar tenemos que

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = (x_2 \cos[x_1 x_2], -\cos[2x_3 + 3x_2] sen x_1)$$

$\frac{\partial g}{\partial x_2} = (x_1 \cos[x_1 x_2], -3sen[2x_3 + 3x_2] \cos x_1)$	$\frac{\partial g}{\partial x_3} = (0, -2sen[2x_3 + 3x_2] \cos x_1)$

luego

$\frac{\partial g}{\partial x_1}(Q) = (\frac{\pi}{3}, 0)$	$\frac{\partial g}{\partial x_2}(Q) = (0, 3)$	$\frac{\partial g}{\partial x_3}(Q) = (0, 2)$

Así la matriz es $$Jg(Q) = Jg(0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2.6. Operadores diferenciales

Gradiente de un campo escalar

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable (o campo escalar). La matriz jacobiana suele ponerse en forma de vector (fila o columna) y se le denomina también **gradiente de** f, denotándolo también así .

$$\bigtriangledown f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$$

Entonces, el gradiente de un campo escalar f es un campo vectorial $\bigtriangledown f$. También se denota grad(f).

Ejemplo: Vamos a hallar el gradiente del campo escalar

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y}{y^2 + 1}$$

Entonces se tiene que

$$\bigtriangledown f(x, y) = (\frac{3x^2}{y^2 + 1}, \frac{y^2 - 1 - 2yx^3}{y})$$

Divergencia de un campo vectorial

La divergencia de un campo vectorial

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

con componentes

$$F = (F_1, ..., F_n)$$

se define como

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

Entonces, la divergencia de un campo vectorial F es un campo escalar $\operatorname{div} F$.

Ejemplo: Vamos a hallar la divergencia del campo vectorial

$$F(x, y, z) = (e^x sen y, e^x \cos y, z)$$

Entonces se tiene que

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(e^x seny) + \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = e^x seny - e^x seny + 1 = 1$$

La divergencia también se suele denotar también por

$$\bigtriangledown \cdot F$$

Rotacional de un campo vectorial en el espacio

El rotacional de un campo vectorial

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

se define como

$$rotF : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

dado por

$$rotF(x,y,z) = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}) \cdot \overrightarrow{i} + (\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}) \cdot \overrightarrow{j} + (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) \cdot \overrightarrow{k}$$

Entonces, el rotacional de un campo vectorial F es un campo vectorial $rotF$.Se suele denotar también por

$$\bigtriangledown \times F$$

Nota: Si usamos la notación $\bigtriangledown = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ sería como si hiciésemos el producto vectorial

$$\bigtriangledown \times F = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \times (F_1, F_2, F_3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo: Vamos a hallar el rotacional del campo vectorial

$$F(x,y,z) = (z^2, 3y, xy^2)$$

Entonces se tiene que

$$rotF(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & 3y & xy^2 \end{vmatrix} = (2xy, 2z - y^2, 0)$$

2.7. El Teorema de la función compuesta (la Regla de la cadena)

Recordemos la regla de la cadena para funciones diferenciables:

Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es diferenciable en x_0 y $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ es diferenciable en $f(x_0)$ entonces la función compuesta $g\circ f$ es diferenciable en x_0. Además

$$d(g\circ f)(x_0)=dg[f(x_0)]\circ df(x_0)$$

Esta fórmula dada sobre las diferenciales (que son aplicaciones lineales) puede expresarse en términos de sus matrices jacobianas (que son las matrices asociadas respecto de las bases canónicas) dándonos la siguiente **versión matricial de la regla de la cadena** (la cual nos dice que la **matriz jacobiana de la composición es el producto de las matrices jacobianas**):

Si f es una función diferenciable en x_0 y g es una función diferenciable en $f(x_0)$ entonces

$$J(g\circ f)(x_0)=Jg[f(x_0)]\cdot Jf(x_0)$$

Ejemplo: Con las notaciones de los dos últimos ejercicios hallemos la matriz jacobiana y las derivadas parciales de la composición $g\circ f$ en el punto $P=(1,1,\frac{\pi}{3}-1)$.

Tengamos en cuenta que $f(P)=f(1,1,\frac{\pi}{3}-1)=(0,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})=Q$ y que

$\mathbb{R}^3\xrightarrow{f}\mathbb{R}^3\xrightarrow{g}\mathbb{R}^2$ y por tanto se puede realizar la composición $g\circ f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$

Entonces se cumple que $J(g\circ f)(P)=Jg(Q)\cdot Jf(P)=$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\pi}{3} & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ \frac{\pi}{3}-1 & 2 & 1\\ \frac{1}{\frac{\pi}{3}-2} & -\frac{1}{\frac{\pi}{3}-2} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{3} & 0\\ \pi-3+\frac{2}{\frac{\pi}{3}-2} & 6-\frac{2}{\frac{\pi}{3}-2} & 3\end{pmatrix}$$

Luego las derivadas parciales son:

$\frac{\partial(g\circ f)(P)}{\partial x}=(\frac{\pi}{3},\pi-3+\frac{2}{\frac{\pi}{3}-2})$

$\frac{\partial(g\circ f)(P)}{\partial y}=(\frac{\pi}{3},6-\frac{2}{\frac{\pi}{3}-2})$

$\frac{\partial(g\circ f)(P)}{\partial z}=(0,3)$

En este ejemplo se podría realizar el cálculo directo de la composición $g\circ f$ para luego derivar, pues se conoce la expresión de ambas funciones. De todos modos, ya que teníamos anteriormente calculadas las matrices jacobianas resulta más productivo utilizarlas.

Lo que hemos calculado en este último ejercicio va a ser analizado, en términos de las derivadas parciales, a continuación

Vamos a ver cómo **calcular las derivadas parciales de una composición de funciones** de la forma

$$\mathbb{R}^n\xrightarrow{f}\mathbb{R}^m\xrightarrow{g}\mathbb{R}^k$$

a partir de las derivadas parciales de f y de g. Denotemos por $x=(x_1,...,x_n)$ a las variables de $\mathbb{R}^n$, $u_1,...,u_m$ a las variables de $\mathbb{R}^m$ y $f_1,...,f_m$ a las funciones coordenadas de f (de hecho en la fórmula que vamos a ver pondremos igualmente f_i que u_i). Entonces a la hora de hallar la derivada parcial con respecto a x_i de la función $g \circ f$ se tiene que

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + ... + \frac{\partial g}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_i}$$

Nota: En la fórmula anterior hacemos la identificación $u_i = f_i$.

Ejemplo: Supongamos que tenemos funciones $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$ y que queremos derivar la composición en los puntos del dominio. Denominemos a estos puntos de forma genérica por (x, y) y a los del dominio de f por (u_1, u_2, u_3). Además usaremos la notación $f = (f_1, f_2, f_3)$ para las funciones coordenadas de f. Entonces

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u_1}(f(x,y)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial u_2}(f(x,y)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial u_3}(f(x,y)) \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u_1}(f(x,y)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial u_2}(f(x,y)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial u_3}(f(x,y)) \cdot \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y)$$

Ejemplo:

Dadas funciones $\qquad \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \qquad$ con $\qquad g(u, v, w) = (wu^2e^v, v\cos w)$

y dado $P \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(P) = (-1, 0, \frac{\pi}{2})$ y de modo que

$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = (1, -2, 0)$	$\frac{\partial f}{\partial y}(P) = (2, -3, 1)$

hallemos las derivadas parciales de la composición $g \circ f$ en el punto P.

Si utilizamos las matrices jacobianas

como

$\frac{\partial g}{\partial u} = (2wue^v, 0)$	$\frac{\partial g}{\partial v} = (wu^2e^v, \cos w)$	$\frac{\partial g}{\partial w} = (u^2e^v, -vsenw)$

y

$\frac{\partial f_1}{\partial x}(P) = 1$	$\frac{\partial f_2}{\partial x}(P) = -2$	$\frac{\partial f_3}{\partial x}(P) = 0$	$\frac{\partial f_1}{\partial y}(P) = 2$	$\frac{\partial f_2}{\partial y}(P) = -3$	$\frac{\partial f_3}{\partial y}(P) = 1$

se tiene pues que

$$Jg(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial g}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial g}{\partial w}(u,v,w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2wue^v & wu^2e^v & u^2e^v \\ 0 & \cos w & -vsenw \end{pmatrix}$$

luego

$$Jg(f(P)) = Jg(-1, 0, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -\pi & \frac{\pi}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y que $\qquad Jf(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(P) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(P) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(P) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(P) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad$ y por tanto

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(P) & \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(P) \end{pmatrix} = J(g \circ f)(P) = Jg(f(P)) \cdot Jf(P) = \begin{pmatrix} -\pi & \frac{\pi}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\pi & -\frac{7\pi}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces concluimos que $\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(P)$ es la primera columna y $\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(P)$ la segunda.

Si utilizamos las derivadas parciales directamente tenemos que

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(P) = \frac{\partial g}{\partial u}(f(P))\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x}(P) + \frac{\partial g}{\partial v}(f(P))\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}(P) + \frac{\partial g}{\partial w}(f(P))\cdot\frac{\partial f_3}{\partial x}(P) =$$

$$= (-\pi,0)\cdot 1 + (\frac{\pi}{2},0)\cdot(-2) + (1,0)\cdot 0 = (-2\pi,0) \qquad \text{y}$$

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(P) = \frac{\partial g}{\partial u}(f(P))\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y}(P) + \frac{\partial g}{\partial v}(f(P))\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y}(P) + \frac{\partial g}{\partial w}(f(P))\cdot\frac{\partial f_3}{\partial y}(P) =$$

$$= (-\pi,0)\cdot 2 + (\frac{\pi}{2},0)\cdot(-3) + (1,0)\cdot 1 = (-\frac{7\pi}{2},0)$$

En este ejemplo no ha lugar el cálculo directo de la composición $g\circ f$ para luego derivar, pues aunque se conoce la expresión de g no se conoce la de f.

2.8. Cambios de coordenadas

Aquí vamos a tratar situaciones dentro de las cuáles está el cambio a coordenadas polares, pero pueden aparecernos cambios tanto de 2 como de más variables. Así partiremos originalmente de unas variables $(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ para expresarlas en función de otras $(u_1,...,u_n)$ mediante alguna relación. Entonces nos interesaremos por la matriz jacobiana del cambio. Si denominamos $\Phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ a la aplicación que define dicho cambio, en el sentido

$$(x_1,...,x_n) = \Phi(u_1,...,u_n).$$

Esto es así porque si tenemos ahora una función

$$g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$$

que depende de las variables o coordenadas $(x_1,...,x_n)$, una expresión que dependa de g y de algunas de sus derivadas parciales respecto de las variables $(x_1,...,x_n)$ podemos representarla en función de la composición de $g\circ\Phi = G$ y algunas de sus derivadas parciales respecto de las variables $(u_1,...,u_n)$ sin más que realizar el cambio de coordenadas. Aplicaremos para ello la fórmula

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial G}{\partial u_j}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

Igual que para la derivación compuesta (de hecho es un caso particular) se puede dar la fórmula matricial con el jacobiano del cambio de coordenadas; incluso esto nos servirá para, mediante el jacobiano inverso, hallar las derivadas parciales del cambio inverso, conocidas las del cambio inicial; la fórmula anterior sería

$$Jg(x) = J(G\circ\Phi^{-1})(x) = JG(\Phi^{-1}(x))\cdot J\Phi^{-1}(x)$$

para cada punto $x = (x_1, ...x_n)$, es decir

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial u_1} & \frac{\partial G}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial G}{\partial u_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Si aparece alguna derivada parcial de orden superior se vuelve a aplicar reiteradamente la fórmula anterior.

Nota: En ocasiones, por abuso del lenguaje, y para simplificar, haremos la asociación $g \simeq G$, identificando ambas funciones.

Veamos en primer lugar algunos cambios de coordenadas usualmente empleados. Comenzaremos por el cambio a polares que ya conocemos:

Ejemplos de cambios:

a) **Coordenadas polares en** $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho sen\theta \end{aligned}$$

b) **Coordenadas cilíndricas en** $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho sen\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

c) **Coordenadas esféricas en** $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta sen\phi \\ y &= \rho sen\theta sen\phi \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned}$$

Ejemplo: Supongamos que tenemos una función

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

que depende de las variables x e y. Mediante el cambio a coordenadas polares $x = \rho \cos \theta, y = \rho sen\theta$ en el cuadrante $x, y > 0$ (despejando obtendríamos el cambio inverso que sería $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan \frac{y}{x}$) vamos a transformar la expresión

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y}$$

es decir, pasaremos estar expresión a coordenadas polares.

Como $\boxed{\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \theta}}$ y $\boxed{\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \theta}}$ hacemos los cálculos y

$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\theta$	$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho sen\theta$	$\frac{\partial y}{\partial \rho} = sen\theta$	$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho\cos\theta$	$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial \rho}\cos\theta - \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{sen\theta}{\rho}$	$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial \rho}sen\theta + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho}$

Luego tenemos que $x\dfrac{\partial g}{\partial x} + y\dfrac{\partial g}{\partial y} = \rho\cos\theta(\dfrac{\partial g}{\partial \rho}\cos\theta - \dfrac{\partial g}{\partial \theta}\dfrac{sen\theta}{\rho}) + \rho sen\theta(\dfrac{\partial g}{\partial \rho}sen\theta + \dfrac{\partial g}{\partial \theta}\dfrac{\cos\theta}{\rho}) =$

$$= \rho(\cos^2\theta + sen^2\theta)\frac{\partial g}{\partial \rho} + (\cos\theta sen\theta - sen\theta\cos\theta)\frac{\partial g}{\partial \theta} = \rho\frac{\partial g}{\partial \rho}$$

Recapitulando quedaría así:

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = \rho\frac{\partial g}{\partial \rho}$$