$\langle S \rangle$ es el menor subespacio vectorial de $E$ que contiene a $S$.

-D-

Sea $F$ un subespacio de $E$ que contiene a $S$.

Veamos que $\langle S \rangle \subset F$.

Sea $\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n \in \langle S \rangle$ $\left(\begin{array}{l}\lambda_i \in \mathbb{K} \\ x_i \in S\end{array}\right.$ $i=1,\dots$

$\Rightarrow$ como $\vec{x}_i \in S \subset F \Rightarrow \vec{x}_i \in F \Rightarrow$

$\underset{\substack{\cap \\ F}}{\lambda_1 \vec{x}_1} + \dots + \underset{\substack{\cap \\ F}}{\lambda_n \vec{x}_n} \in F$ ya que $F$ subespa

$\Rightarrow \langle S \rangle \subset F$ #

Ejercicios:

1 a) Si $b \neq 0 \Rightarrow A$ no subespacio

Sea $(x_1, y_1, z_1, t_1) \in A \Rightarrow x_1 + 2y_1 - z_1 + t_1 = b$

$(x_2, y_2, z_2, t_2) \in A \Rightarrow x_2 + 2y_2 - z_2 + t_2 = b$

$(x_1, y_1, z_1, t_1) + (x_2, y_2, z_2, t_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 +$

¿ $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2) \in A$ ?

$(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) + (t_1 + t_2) =$

$= \underset{\substack{\| \\ b}}{(x_1 + 2y_1 - z_1 + t_1)} + \underset{\substack{\| \\ b}}{(x_2 + 2y_2 - z_2 + t_2)} = 2b$

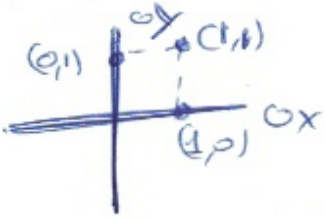
Cuando $2b = b$ solo si $\boxed{b=0}$

Si $b \neq 0 \Rightarrow (x_1, y_1, z_1, t_1) + (x_2, y_2, z_2, t_2) \notin A$

Si $b = 0 \Rightarrow (x_1, y_1, z_1, t_1) + (x_2, y_2, z_2, t_2) \in A$

(Idem con $\lambda \cdot (x_1, y_1, z_1, t_1) \in A$)

b) $B = \{ (x,y) / x \cdot y = 0 \}$ de $\mathbb{R}^2$




B no subespacio

$(1,0) \in B$ pero $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin B$

$(0,1) \in B$

c) $G = \left\{ (x,y,z,t) / \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 2\alpha \\ t = 5\alpha \end{array} \quad \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ de $\mathbb{R}^4$

$(x,y,z,t) \in G \Leftrightarrow (x,y,z,t) = (\alpha, \alpha, 2\alpha, 5\alpha) =$

$= \alpha (1, 1, 2, 5) \Rightarrow$

$G = \langle (1,1,2,5) \rangle \Rightarrow$ $\boxed{G \text{ subespacio}}$

d) $D = \left\{ (x,y,z,t) / \begin{array}{l} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right\}$ de $\mathbb{R}^4$

$(x,y,z,t) \in D \Rightarrow \begin{array}{l} x + y = 0 \Rightarrow x = -y \\ y - z = 0 \Rightarrow y = z \end{array}$

$(x,y,z,t) \in D \Leftrightarrow (x,y,z,t) = (-y, y, y, t) =$

$= y(-1, 1, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1) \Rightarrow$

$D = \langle (-1,1,1,0), (0,0,0,1) \rangle$

e) $E = \{ (x,y) \,/\, x^2 = b,\ b \in \mathbb{R}^+ \}$ de $\mathbb{R}$

$\uparrow$ $b > 0$

<u>No subespacio</u>: $(x_1, y_1) \in E \Rightarrow x_1^2 = b$

$(x_2, y_2) \in E \Rightarrow x_2^2 = b$

¿$(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in E$?

$$(x_1 + x_2)^2 = \underset{\substack{\| \\ b}}{x_1^2} + \underset{\substack{\| \\ b}}{x_2^2} + 2x_1x_2 = 2b + 2x_1x_2$$

$$2b + 2x_1x_2 = b$$

$$2b - b = -2x_1x_2$$

$$b = -2x_1x_2$$

$$x_1x_2 = \frac{-b}{2}$$

$$\underset{\substack{\| \\ b \cdot b}}{(x_1x_2)^2} = \frac{b^2}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{b^2}{4} \quad \text{NO}$$

$\Rightarrow$ <u>nunca es subespacio si $b > 0$</u>.

f) $F = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq y \}$

cuadrantes positivos.

$x_1 \geq y_1 \Rightarrow x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$

$x_2 \geq y_2$ F s

$x_1, y_1 \geq 0$

$x_2, y_2 \geq 0$

No subespacio

$(2,1) \in F \quad 2 \geq 1$

$-1(2,1) = (-2,-1) \notin F$

$-2 \leq -1$

Ej: a) si $b=0$

$$A = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+2y-z+t=0\}$$

Si $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \Rightarrow x = -2y+z-t \Rightarrow$

$(x,y,z,t) = (-2y+z-t, y, z, t) =$

$= y(-2,1,0,0) + z\cdot(1,0,1,0) + t(-1,0,0,1)$

$\Rightarrow A = \langle (-2,1,0,0), (1,0,1,0), (-1,0,0,1) \rangle$

Es obvio que $(-2,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$ y $(-1,0,0,1)$ son L.i.

$$\lambda(-2,1,0,0) + \mu(1,0,1,0) + \gamma(-1,0,0,1) = (0,0,0,0$$

$$-2\lambda + \mu - \gamma = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda &= 0 \\ \mu &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \lambda = \mu = \gamma = 0 \Rightarrow \text{Li}$$

Así que $\{(-2,1,0,0), (1,0,1,0), (-1,0,0,1)\}$ es base de $A$ si $(b=0)$.

c) $G = \langle (1,1,2,5) \rangle \Rightarrow$ base de $G$ $\{(1,1,2,5)$

d) $D = \langle (-1,1,1,0), (0,0,0,1) \rangle \Rightarrow$ como $(0,0,0,1)$ no se puede poner como c.l. de $(-1,1,1,0)$ son L.i. y por tanto base.

3) ¿ a, b ?

$(1, 0, a, b) \in \langle (1, 4, -5, 2), (1, 2, 3, -1) \rangle$

$\exists \alpha, \beta$ / $(1, 0, a, b) = \alpha(1, 4, -5, 2) + \beta(1, 2, 3, -1)$

$\Rightarrow (1, 0, a, b) = (\alpha + \beta, 4\alpha + 2\beta, -5\alpha + 3\beta, 2\alpha - \beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 0 = 4\alpha + 2\beta \\ a = -5\alpha + 3\beta \\ b = 2\alpha - \beta \end{cases}$$ sistema compatible.

$$\begin{array}{l} -4 = -4\alpha - 4\beta \\ 0 = 4\alpha + 2\beta \\ \hline -4 = -2\beta \Rightarrow \beta = \frac{-4}{-2} = 2, \boxed{\beta = 2} \end{array}$$

$\alpha = 1 - \beta = 1 - 2 = -1 \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$

$a = -5(-1) + 3 \cdot 2 = 5 + 6 = 11$

$\boxed{a = 11}$

$b = 2 \cdot (-1) - 2 = -2 - 2 = -4$

$\boxed{b = -4}$

(4) $V$ esp. vect de dimensión $n$.
$\dim(V) = n$. Demuestra las ciertas y por contraejemplos de las falsas.

1) FALSO en $\mathbb{R}^2$

$\{(1,0), (2,0), (3,0)\}$ no generan $\mathbb{R}^2$

2) $m < n$ vectores son siempre L.I.

FALSO. En $\mathbb{R}^3$

$\{(1,0,0), (2,0,0)\}$ son L.D.

3) Un sistema linealmente independiente con $n$ vectores es generador de $V$ (verdad

-D-

Sabemos que $\boxed{\dim(V) = n}$ $\Rightarrow$ todas las bases de $V$ tienen $n$ vectores.

$\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ L.I. $\Rightarrow$ es s.g. si no fuese s.g. $\Rightarrow$ puedo tomar $\vec{u} \notin \langle \vec{v}_1, \dots$

y $\underbrace{\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \cup \{\vec{u}\}}_{S'}$ sería L.I. $\Rightarrow$

si $S'$ s.g. para y sino complemento con vectores L.I hasta obtener un s.g. pero habré conseguido una base con más de $n$ vectores $\Rightarrow$ CONTRADICCIÓN.

Así n vectores L.i. en un espacio de dimensión n $\Rightarrow$ s.g y base //

4/ Un s.g con n vectores es L.i. (verdad)

D-

Si $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ por un s.g, si no fuese L.i. $\Rightarrow \exists\ \vec{v_i}$ que depende linealmente de los restantes $\Rightarrow$ lo elimino y consigo un s.g. L.i. (repito el proceso si hay otros vectores que dependen linealmente del resto) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ consigo una base de menos de n elementos y esto es una contradicción

$\Rightarrow$ esos vectores son L.i. //

5) Ningún sistema que contenga al vector nulo es linealmente independiente. (verdad)

D- $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}, \vec{0}\}$ L.d.

$\lambda_1 \vec{v_1} + \dots + \lambda_n \vec{v_n} + \underset{\neq 0}{\mu}\, \vec{0} = \vec{0}$ L.d.

6) Todo sistema que no contenga al vector nulo es L.i. FALSO

$\{(1,0),(2,0)\}$ L.d. y no contiene al vector nulo.

b) $\{(1,0,2), (-2,1,1), (0,1,5)\}$

$\alpha(1,0,2) + \beta(-2,1,1) + \gamma(0,1,5) = (0,0,0)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 - 1 = 0 \Rightarrow \text{L.d}$$

$\Rightarrow$ hay uno que se pone como c.l. del resto (se elige uno)

$\{(1,0,2), (-2,1,1)\}$ base

(5) a) $\langle (1,2,-1), (3,-1,0), (4,1,1) \rangle$

Si son l.i. ella es la base

$\lambda(1,2,-1) + \mu(3,-1,0) + \gamma(4,1,1) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu + 4\gamma = 0 \\ 2\lambda - \mu + \gamma = 0 \\ -\lambda + \gamma = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = \mu = \gamma = 0 \Rightarrow$ S.C.D. sol. única $(0,0,0)$

Cuando pasa esto por T^ma Rouche-Frobenius

si rango$(A) = 3$ = rango máximo $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 3 - 4 - 6 = -14 \neq 0 \Rightarrow \text{l.i.}$$

$\Rightarrow \{(1,2,-1), (3,-1,0), (4,1,1)\}$ base.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5-4-1 = 0 \Rightarrow \text{l.d.}$$

b) $\{(1,0,2), (-2,1,1), (0,1,3)\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \{(1,0,2), (-2,1,1)\} \text{ base.}$$

c) Entregable.

Ejer 6: Entregable.

Ej. 7:

a) Si $\{x, y, z\}$ son Li $\Rightarrow$

a.1) ¿es L.i. $\{x, y\}$?

$\lambda x + \mu y + \gamma z = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = \gamma = 0.$

Respuesta sí $\{x, y\}$ l.i.

-D-

Si $\{x, y\}$ no Li $\Rightarrow x = \alpha y \quad \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow$

$x = \alpha y + 0 \cdot z \Rightarrow \{x, y, z\}$ ld y es

no pasa $\Rightarrow \{x, y\}$ li. #

a.2) $\lambda (x-y) + \mu (x+y) + \gamma (y+z) = 0$

$\lambda x - \lambda y + \mu x + \mu y + \gamma y + \gamma z = 0$

$(\lambda+\mu) x + (\mu - \lambda) y + \gamma z = 0 \Rightarrow \{x, y, z\}$ Li $\Rightarrow$

# Hoja Espacios Vectoriales:

(10) $S = \langle (1,2,1,-1), (1,3,a,-1), (-1,a,-3,1) \rangle$

con a tal que $(1,-1,4,-1) \notin S$

$T = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{array}{l} x+t=b \\ y=c-1 \end{array} \right\}$ con b y c tales que T es

subesp. vect.

– D –

Empezamos con T: Si $b \neq 0 \vee c \neq 1 \Rightarrow$ T no subespac

En efecto: si $(x,y,z,t) \in T \wedge (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},\tilde{t}) \in T \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+\tilde{x}, y+\tilde{y}, z+\tilde{z}, t+\tilde{t})$ pertenecerí

a T si $(x+\tilde{x})+(t+\tilde{t}) = b$ pero como $(x,y,z,t) \in T \Rightarrow$

$\Rightarrow x+t=b \wedge$ como $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},\tilde{t}) \in T \Rightarrow \tilde{x}+\tilde{t}=b$

Así $b+b=b \Leftrightarrow 2b=b$ que solo pasa si $\boxed{b=0}$.

Análogamente si $c \neq 1$ y $(x,y,z,t) \in T \Rightarrow y+1=c$

si $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},\tilde{t}) \in T \Rightarrow \tilde{y}+1=c \Rightarrow (x+\tilde{x}, y+\tilde{y}, z+\tilde{z}$

$\in T$

si $y+\tilde{y}+1 = c$. pero $\underbrace{y+1}_{=c} + \tilde{y} = c \Rightarrow$

$\tilde{y}=0$ y si $\tilde{y} \neq 0$ la propiedad falla. (equivalentemente $2(c-1) = \Leftrightarrow c =$

Por tanto $T = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{array}{l} x+t=0 \\ y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow$

si $(x,y,z,t) \in T \Rightarrow (-t, \underset{0}{y}, z, t) = t(-1,0,0,1) + z(0,0,1$

$\Rightarrow T = \langle (-1,0,0,1), (0,0,1,0) \rangle \Rightarrow \{(-1,0,0,1), (0,$

base de T y $\dim(T) = 2$.

$(x, y, z, t) \in T \iff \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \\ t = \lambda \end{cases}$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow$ ecuac. paramétricas

$\|$

$\lambda(-1,0,0,1) + \mu(0,0,1,0) = (-\lambda, 0, \mu, \lambda)$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -x \to \boxed{x = -\lambda} \\ y = 0 \\ z = \mu \\ t = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ecuaciones cartesianas

Analizamos $S'$:

Si $(1, -1, 4, -1) \notin S' \iff \nexists\ \lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$ m

$(1, -1, 4, -1) = \lambda(1, 2, 1, -1) + \mu(1, 3, a, -1) + \gamma(-1, a, -3, 1)$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{4\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix}}_{3\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}}_{4\times 1}$$ sistema incompatible.

$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & -1 \\ 1 & a & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)}_{A}}_{A^*}$$

rango$(A) \neq$ rango$(A^*)$.

- Tiene que pasar por ejemplo que rango$(A^*) = 4 \neq 3 =$ rango$(A)$. ó rango$(A^*) = 3 \neq 2 =$ rango$(A)$. Notad que el rango de A es al menos 2

ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 \neq 0$

Veamos cuando rango $(A^*) = 4$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & -1 \\ 1 & a & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ siempre ya que la } F1 = -F$$

Así rango $(A^*) \neq 4$.

Veamos para que valores de a rango $(A^*) = 3$ y rango$(A) =$

En A hay 2 submenores de tamaño $3 \times 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & -3 \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & a & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$ , hemos d

forzar a que ambos determinantes sean cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & -3 \end{vmatrix} = (-9 + a - 2a) - (-3 - 6 + a^2$$

$$= -\cancel{9} - a + \cancel{9} - a^2 = -(a^2 + a) =$$

$$= -a(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \vee \\ a = -1 \end{cases}$$

Por otro lado,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & a & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2a + 9 - a) - (-a^2 + 3 + 6) =$$

$$= a + 9 + a^2 - 9 = a^2 + a = a(a+1) = 0$$

$\Rightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ \vee \\ a = -1 \end{matrix}$. Así para $a = 0 \vee a = -1 \Rightarrow$ rango$(A)$

Veamos en ambos casos si rango $(A^*) = 3$.

$$A^*_{a=0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \approx$$

$$\underset{F1+F4}{\approx} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$ Aquí hay dos

submenores de tamaño 3 x 3 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$ Notemos

que $\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (0+9+0) - (0+3+6) = 9-9=0$ y

$\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (9+0+0) - (-3+0+12) = 9-9=0$

Así en este caso rango $(A^*_{a=0})$ nunca es 3 y

el sistema es C. Indeterminado al ser rango $(A) =$ rango

$= 2$. Por tanto hay que descartar $a=0$.

Nos quedamos con $\boxed{a=-1}$ $\Longrightarrow$

$$A^*_{a=-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & +1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{F1+F4}{\approx} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tomamos el 1er menor de tamaño 3x3 :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2+9+1) - (-1+3+6) = 8-8=0$$

Operamos con el 2º:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (9+4+1) - (-3-1+12) =$$

$$= 14 - 8 = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{en este caso}$$

rango $(A^*) = 3 \neq 2 = \text{rango}(A)$ sist. incompatible.

Así el pto $(1,-1,4,-1) \notin S' \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -1.}$

$S' = \langle (1,2,1,-1), (1,3,-1,-1), (-1,-1,-3,1) \rangle$

Veamos si los vectores son l.i. $\Leftrightarrow \nexists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal q

$$(1,2,1,-1) = \alpha(1,3,-1,-1) + \beta(-1,-1,-3,1) \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \\ -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Sist. inc}$$

Si $\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right)}_{A^*}$ $\Rightarrow$ el sistema es incompatible si rango $(A^*) = 3 \neq$ rango $(A)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \\ -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ahora $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{F1+F4}{\approx} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (9+1-2) - (6-1+3) =$

$= 8 - 8 = 0 \Rightarrow$ rango $(A^*) = 2 =$ rango $(A)$

$=$ nº de incognitas $\Rightarrow$ sist compatible determinado.

$\Rightarrow$ los 3 vectores de $\{(1,2,+1,-1),(1,3,-1,-1),$
$(-1,-1,-3,1)\}$ son dependientes

$\Rightarrow \{(1,2,1,-1),(1,3,-1,-1)\}$ base de $S \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(S)=2$. Así $(x,y,z,t)\in S \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 2\lambda + 3\mu \\ z = \lambda - \mu \\ t = -\lambda - \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x + t = 0}$$

$$\begin{cases} 2\lambda + 3\mu = y \\ \lambda - \mu = z \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} 2\lambda + 3\mu = y \\ -2\lambda + 2\mu = -2z \\ \hline 5\mu = y - 2z \end{array}$$

$$\boxed{\mu = \frac{y-2z}{5}}$$

$$\boxed{\lambda} = z + \mu = z + \frac{y-2z}{5} = \frac{5z+y-2z}{5} = \boxed{\frac{3z+y}{5}}$$

$$z = \lambda - \mu = \frac{3z+y}{5} - \frac{y-2z}{5} =$$

$= z$ esta ecuación no aporta.

$$t = -\lambda - \mu = \frac{-3z-y}{5} + \frac{y+2z}{5} = \frac{-z-2y}{5} \rightarrow$$

$$5t = -z - 2y \rightarrow \boxed{2y + z + 5t = 0}$$

$$x = \lambda + \mu = \frac{3z+y}{5} + \frac{y-2z}{5} =$$

$$= \frac{z+2y}{5} \rightarrow$$

$$5x = z + 2y \rightarrow \boxed{2y + z - 5x = 0}$$

$$y = 2\lambda + 3\mu = 2\cdot\left(\frac{3z+y}{5}\right) + 3\left(\frac{y-2z}{5}\right) =$$

$$= \frac{6z+2y}{5} + \frac{3y-6z}{5} =$$

$$= \frac{6z+5y-6z}{5} = y \text{ no aporta}$$

Así las ecuaciones cartesianas son:

$$\begin{cases} x + t = 0 \\ 2y + z + 5t = 0 \\ 2y + z - 5x = 0 \end{cases}$$

$x+t=0$

$0 = 5t + 2y + z$

Veamos quienes $S \cap T$ (lo haremos igualando las ecuaciones paramétricas):

$$S \equiv \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 2\lambda + 3\mu \\ z = \lambda - \mu \\ t = -\lambda - \mu \end{cases} \qquad T \equiv \begin{cases} x = -\tilde{\lambda} \\ y = 0 \\ z = \tilde{\mu} \\ t = \tilde{\lambda} \end{cases} \qquad \lambda, \mu, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$$

$$\begin{cases} \lambda + \mu = -\tilde{\lambda} \\ 2\lambda + 3\mu = 0 \\ \lambda - \mu = \tilde{\mu} \\ -\lambda - \mu = \tilde{\lambda} \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda + \mu = -\tilde{\lambda} \\ \lambda - \mu = \tilde{\mu} \\ 2\lambda + 3\mu = 0 \end{cases} \rightarrow 2\lambda = -\tilde{\lambda} +$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda = -\lambda + \mu \\ 2\lambda = -3\mu \end{cases}$$

$$0 = -\lambda + \mu + 3\mu \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{\lambda - \mu}{3}}$$

Como $2\lambda + 3\mu = 0 \Rightarrow 2\lambda + 3 \cdot \left(\frac{\lambda - \mu}{3}\right) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\lambda + (\lambda - \mu) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\mu - \lambda}{2}}$$

Así los ptos de la forma

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu = \frac{\mu - \lambda}{2} + \frac{\lambda - \mu}{3} = \frac{3\mu - 3\lambda + 2\lambda - 2\mu}{6} = \boxed{-\frac{1}{6}\lambda + \frac{1}{6}\mu} \\ y = 2 \cdot \left(\frac{\mu - \lambda}{2}\right) + 3\left(\frac{\lambda - \mu}{3}\right) = 0 \\ z = \frac{\mu - \lambda}{2} - \frac{\lambda - \mu}{3} = \frac{\mu - \lambda}{2} + \frac{\mu - \lambda}{3} = \frac{3\mu - 3\lambda + 2\mu - 2\lambda}{6} = \frac{5}{6}\mu - \frac{5}{6}\lambda \\ t = -\lambda - \mu = -x = -\frac{1}{6}\mu + \frac{1}{6}\lambda \end{cases}$$

Así $(x, y, z, t) \in S \cap T \Leftrightarrow (x, y, z, t) = \left(-\frac{1}{6}\lambda + \frac{1}{6}\mu, 0, \frac{5}{6}\mu - \frac{5}{6}\lambda, -\frac{1}{6}\mu + \frac{1}{6}\lambda\right) = \otimes$

~~$\left(-\frac{1}{6}, 0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right) \mu + \left(\frac{1}{6}, 0, -\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}\right) \Rightarrow$~~

~~$\left\{\left(-\frac{1}{6}, 0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{6}, 0, -\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}\right)\right\}$ es base de $S \cap T \Rightarrow$~~

~~$\dim(S \cap T) = 2 = \dim(S) = \dim(T) \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow$ [illegible]~~

$$* = \left( -\tilde{\lambda}, 0, \tilde{\mu} ; \tilde{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{6}\tilde{\lambda} + \frac{1}{6}\tilde{\mu} &= -\tilde{\lambda} \\ \frac{5}{6}\tilde{\mu} - \frac{5}{6}\tilde{\lambda} &= \tilde{\mu} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{multiplicamos por } 6} \left\{\begin{aligned} -\tilde{\lambda} + \tilde{\mu} &= -6\tilde{\lambda} \\ 5\tilde{\mu} - 5\tilde{\lambda} &= 6\tilde{\mu} \end{aligned}\right.$$

$$-\frac{1}{6}\tilde{\mu} + \frac{1}{6}\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda} \leftarrow \text{ec. repetida}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} +5\tilde{\lambda} + \tilde{\mu} &= 0 \\ -5\tilde{\lambda} - \tilde{\mu} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{misma ec.} \Rightarrow$$

$$\tilde{\mu} = -5\tilde{\lambda}. \text{ Así}$$

$$(x, y, z, t) \in S \cap T \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\tilde{\lambda} \\ y = 0 \\ z = \tilde{\mu} = -5\tilde{\lambda} \\ t = \tilde{\lambda} \end{cases} \Rightarrow (x, y, z, t) \in S \cap T \Rightarrow$$

$$(x, y, z, t) = \tilde{\lambda}(-1, 0, -5, 1) \Rightarrow$$

$$S \cap T = \langle (-1, 0, -5, 1) \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim(S \cap T) = 1.}$$

Veamos esto con cartesianas:

$$T \equiv \begin{cases} t + x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad S \equiv \begin{cases} x + t = 0 \\ 2y + z + 5t = 0 \\ 2y + z - 5x = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación aporta es doble.

$$\begin{cases} x + t = 0 \Rightarrow x = -t \\ y = 0 \\ 2y + z + 5t = 0 \\ 2y + z - 5x = 0 \end{cases} \quad \left.\begin{matrix} z = -5t \\ z = 5x = -5t \end{matrix}\right\} \text{(repetida)}.$$

Así $(x, y, z, t) \in S \cap T \Leftrightarrow (x, y, z, t) =$

$= (-t, 0, -5t, t) = t(-1, 0, -5, 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow S \cap T = \langle (-1, 0, -5, 1) \rangle \Rightarrow$

$\dim(S \cap T) = 1$