

19.3 ACTIVIDADES DE APLICACION

Actividad 19.3.1 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(a) y' + 2y = e^{-x}. \quad (b) y' - 2xy = x. \quad (c) xy' + 2y = \sin x.$$

$$(d) y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}. \quad (e) xy' = \sqrt{1-y^2}. \quad (f) y' + y^2 \sin x = 0.$$

Actividad 19.3.2 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(a) 2x + 3 + (2y - 2)y' = 0. \quad (b) e^x \sin y + 3y - (3x - e^x \sin y)y' = 0.$$

$$(c) 2xy^2 + 2y + (2x^2y + 2x)y' = 0. \quad (d) 3xy + y^2 + (x^2 + xy)y' = 0.$$

$$(e) y + (2x - ye^y)y' = 0. \quad (f) 3x^2y + 2xy + y^3 = -(x^2 + y^2)y'.$$

Actividad 19.3.3 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(a) y + (2xy - e^{-2y})y' = 0. \quad (b) y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}. \quad (c) y' = \frac{x+y}{x}.$$

$$(d) x - y = (x + 3y)y'. \quad (e) y' = \frac{2x + y - 1}{2x + y + 2}. \quad (f) y' = \frac{2y - x + 5}{2x - y - 4}.$$

Actividad 19.3.4 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(a) y' = \cos(x + y). \quad (b) y' + \frac{y}{x+1} - \frac{1}{2}(x+1)^3 y^2.$$

$$(c) xy' + y = y^2 \log x. \quad (d) 3xy' - 2y = x^3 y^{-3}.$$

$$(e) \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} y' = 0. \quad (f) y' = e^{x+y}.$$

$$(g) y + e^x = y'. \quad (h) bx + cy + (ax + by)y' = 0.$$

Actividad 19.3.5 Resolver los problemas de condiciones iniciales siguientes:

$$(a) \begin{cases} x + y \cos x = -y' \sin x \\ y(0) = 2. \end{cases} \quad (b) \begin{cases} y' = \frac{y^3}{1 - 2xy^2} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + ye^{-x} y' = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (d) \begin{cases} \frac{2x}{y + x^2 y} = y' \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} y' - y = 2xe^{2x} \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (f) \begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} xy' + 2y = \sin x \\ y(\pi/2) = 1. \end{cases} \quad (h) \begin{cases} y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2} \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Actividad 19.3.6 El isótopo radioactivo del Torio 234 se desintegra a una rapidez proporcional a la cantidad existente en ese instante de tiempo. Si 100 miligramos de este material se reducen a 82.04 miligramos en un semana, ¿cuánto Torio tendremos al cabo de tres semanas? ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que la cantidad de Torio se reduzca a la mitad?

Actividad 19.3.7 Supóngase que se deposita un millón de pesetas en un banco que paga un interés del 6% al año. Calcular la cantidad de dinero que se tendrá al cabo de 3 años y medio.

Actividad 19.3.8 Supongamos que decidís matar al profesor de fundamentos matemáticos de la ingeniería. Una vez perpetrado el hecho, se encuentra el cuerpo en el despacho del mismo que está a una temperatura de 20°C a las 6 de la tarde. La temperatura corporal de cadáver era de 35°C en dicho momento. Una hora más tarde la temperatura era de 33°C . ¿A qué hora se produjo el horripilante y brutal suceso?

Actividad 19.3.9 Hallar las curvas que verifican cada una de las siguientes propiedades geométricas:

- La distancia de un punto de la curva al origen es igual a la longitud del segmento de la normal en el punto delimitado por el propio punto y el eje OX.
- La proyección sobre el eje OX de la parte de la normal en (x, y) delimitada por (x, y) y el eje OX es 1.
- La proyección sobre el eje OX de la parte tangente entre (x, y) y el eje OX tiene longitud 1.
- La distancia del origen a cada tangente es igual a la abscisa del punto de tangencia correspondiente.

Actividad 19.3.10 Entre los alumnos de esta asignatura se extiende el rumor de que el examen de problemas va a ser muy difícil. Si hay 1000 alumnos de dicha asignatura y el rumor se extiende de manera proporcional al número de alumnos que todavía no lo han oído, ¿cuántos días tardarán en saberlo 950 alumnos sabiendo que a los dos días lo sabían 850 alumnos?

Actividad 19.3.11 Un tanque contiene inicialmente V_0 galones de solución salina que contiene a Kg. de sal. Otra solución salina que contiene b Kg. de sal por galón se vierte en el tanque a la razón de $e^{\frac{at}{\min}}$ mientras que simultáneamente, la solución bien mezclada sale del tanque a razón de $f^{\frac{at}{\min}}$. Encontrar la cantidad de sal que hay en el tanque en un momento t .

20.3 ACTIVIDADES DE APLICACION

Actividad 20.3.1 Dada la ecuación lineal no homogénea de orden n

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x),$$

y dadas dos soluciones de la misma z e y , comprobar que la función $z - y$ es solución de la ecuación lineal homogénea

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0.$$

Actividad 20.3.2 Resolver las siguientes ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad y'' + y' - 2y &= 0 & \text{(b)} \quad y'' - y' - 2y &= 0 \\ \text{(c)} \quad y'' - 2y' + y &= 0 & \text{(d)} \quad y'' - 4y' - 12y &= 0 \\ \text{(e)} \quad 4y'' + 4y' + y &= 0 & \text{(f)} \quad y^{(3)} - y'' + 2y' - 2y &= 0 \\ \text{(g)} \quad y^{(4)} + y'' - 2y &= 0 & \text{(h)} \quad y^{(6)} - 3y'' + 2y &= 0. \end{aligned}$$

Actividad 20.3.3 Calcular las soluciones de las siguientes ecuaciones homogéneas con coeficientes variables:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad x^2 y'' + 2xy' &= 0 \text{ con } y_1(x) = 1. \\ \text{(b)} \quad x^2 y'' + 2xy' - 2y &= 0 \text{ con } y_1(x) = x. \\ \text{(c)} \quad x^2 y'' + 3xy' + y &= 0 \text{ con } y_1(x) = x^{-1}. \\ \text{(d)} \quad x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y &= 0 \text{ con } y_1(x) = x. \end{aligned}$$

Actividad 20.3.4 Resolver las siguientes ecuaciones no homogéneas:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad y'' + y' - 2y &= e^x & \text{(b)} \quad y'' - y' - 2y &= \cos x \\ \text{(c)} \quad y'' - 2y' + y &= 1 & \text{(d)} \quad y'' + 2y' + y &= x^2 \\ \text{(e)} \quad y'' + 2y' - 3y &= x^3 & \text{(f)} \quad 4y'' + 4y' + y &= xe^x \\ \text{(g)} \quad y'' + 2y' + y &= x \cos 2x & \text{(h)} \quad y'' + 6y' + 13y &= \sin 3x \\ \text{(i)} \quad y'' + 4y &= e^{2x} & \text{(j)} \quad y'' + 4y' + 5y &= e^x \cos x \\ \text{(k)} \quad y'' - 2y' + 6y &= e^x + x & \text{(l)} \quad y^{(3)} - y'' + 2y' - 2y &= x. \end{aligned}$$

Actividad 20.3.5 Resolver los siguientes problemas de condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \left. \begin{aligned} y'' + y' - 2y &= 0 \\ y(0) = 1, y'(0) &= 2. \end{aligned} \right\} & \text{(b)} \quad \left. \begin{aligned} y'' - y' - 2y &= \cos x \\ y(0) = 1, y'(0) &= -1. \end{aligned} \right\} \\ \text{(c)} \quad \left. \begin{aligned} y'' - 2y' + y &= 1 \\ y(1) = 0, y'(1) &= 0. \end{aligned} \right\} & \text{(d)} \quad \left. \begin{aligned} y'' + y &= \sin x \\ y(0) = 1, y'(0) &= -1. \end{aligned} \right\} \\ \text{(e)} \quad \left. \begin{aligned} y'' + 2y' + y &= x^2 \\ y(0) = 0, y'(0) &= 1. \end{aligned} \right\} & \text{(f)} \quad \left. \begin{aligned} y'' - 4y' - 12y &= 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 & \end{aligned} \right\} \\ \text{(g)} \quad \left. \begin{aligned} y^{(3)} - y'' + 2y' - 2y &= x \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) &= 1. \end{aligned} \right\} & \text{(h)} \quad \left. \begin{aligned} y'' + 4y' + y &= 1 - x^2 \\ y(0) = 0, y'(0) &= 1. \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$