Problemas espacio Euclídeo :

(1) De los siguientes productos definidos sobre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, determinar cuáles de ellos son productos escalares :

(a) $<(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)> = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

(b) $<(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)> = x_1^2y_1^2 + x_2y_2 + x_3y_3$

(c) $<(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)> = x_1x_2 + 4x_2y_2 + 4x_3y_3$

(d) $<(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)> = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$

(2) Dado el siguiente producto escalar sobre $\mathbb{R}^2$

$$<(x_1, x_2), (y_1, y_2)> = x_1y_1 + 4x_2y_2$$

calcular su matriz de Gram respecto a la base canónica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ y la base $B = \{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2\}$

(3) Sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ considérense los siguientes productos escalares dados por sus matrices de Gram respecto de la base canónica :

$$<\vec{x}, \vec{y}>_1 = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$<\vec{x}, \vec{y}>_2 = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Se pide :

(a) Calcular la norma de los vectores $(3, 2, 1)$ y $(-1, -8, 0)$ usando los productos escalares anteriores.

(b) Obtener las matrices de Gram de los productos escalares $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ respecto de la base $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$.

4. Sea V un espacio vectorial sobre el cual se tiene definido un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de forma que para la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ se verifica:

$$\langle u_1, u_1 \rangle = 1 \qquad \langle u_1, u_2 \rangle = 1 \qquad \langle u_1, u_3 \rangle = 0$$

$$\langle u_2, u_2 \rangle = 3 \qquad \langle u_2, u_3 \rangle = 1 \qquad \langle u_3, u_3 \rangle = 1$$

Se pide calcular:

(a) El producto escalar de los vectores $u = u_1 + 3u_2 - u_3$ y $v = u_1 - u_2 + u_3$, así como el ángulo que forman.

(b) Una base ortonormal a partir de $\mathcal{B}$.

(c) El valor de α para que el vector $u = \alpha u_1 + u_2$ sea unitario.

(d) El valor de α para que los vectores $u = \alpha u_1 + u_2$ y $v = \alpha u_1 - u_2 - u_3$ sean ortogonales.