Ejercicio 1. Compruébese que la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x,y,z) = \left(x^2 + yz - z^2, xy - xz + 2z^2, xyz\right)$$

es de clase C^1 en todo punto de $\mathbb{R}^3$, y calcular su matriz jacobiana y su diferencial en el punto $(3,2,1)$.

Ejercicio 2. Dadas las funciones

$$f(x,y,z) = (\sin(xy+z), (1+x^2)^{yz}) \quad \text{y} \quad g(u,v) = (u+e^v, v+e^u),$$

calcúlese la matriz jacobiana de f en el punto $(1,-1,1)$, la matriz jacobiana de g en el punto $(0,1/2)$ y la de $g \circ f$ en $(1,-1,1)$.

Ejercicio 3. Determínese si la función $T(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2}$ satisface la ecuación en derivadas parciales (llamada Ecuación de Laplace)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

Ejercicio 4. Determínese si existe alguna función f de clase C^2 tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x \operatorname{sen} y.$$

Ejercicio 5. Demuéstrese que cualquier función de la forma $z(x,t) = g(x+kt)$ cumple la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Ejercicio 6. La temperatura en el punto (x,y,z) de una pieza metálica sólida está dada por la fórmula $f(x,y,z) = e^{2x+y+3z}$ grados. ¿En qué dirección con respecto al punto $(0,0,0)$ se incrementa más rápidamente la temperatura?

Ejercicio 7. Estúdisese la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \sin x}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0). \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ejercicio 8. Estúdiese la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0). \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ejercicio 9. Estúdiese diferenciabilidad de f en $(0,0)$ y en caso de ser diferenciable calcúlese su matriz jacobiana

$$f(x,y) = \begin{cases} (e^{x+y}, \sin(x-y), x^2\sin(1/x)) & \text{si} \quad x \neq 0. \\ (e^y, -\sin y, 0) & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 10. Calcúlese el plano tangente al paraboloide elíptico dado por la ecuación $z = x^2 + 3y^2 + 4$ en el punto $(1,0,5)$.

Ejercicio 11. Estudiar los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones:

1. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
2. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
3. $f(x,y,z) = x^2 + xy - 3xz + 9$.
4. $f(x,y) = x\sin y$.
5. $f(x,y) = \arctan(x^3 + y^3 - 3xy) + 4$.
6. $f(x,y,z) = (x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$.

Ejercicio 12. Calcular los extremos relativos de la función $f(x,y,z) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z$ con $-\pi < x, y, z < \pi$.

Ejercicio 13. Calcular los extremos absolutos de las siguientes funciones en el dominio indicado:

1. $f(x,y) = -x^2 + xy + y^2 - 5x$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 3\}$.
2. $f(x,y) = xy^2$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
3. $f(x,y) = 4x^2 - y^2$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.
4. $f(x,y) = 4xy^2 - x^2y^2 - x^2y^3$, siendo D la región triangular cerrada en el plano xy con vértices $(0,0), (0,6)$ y $(6,0)$.
5. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$, $D = \{(x,y) : x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$.
6. $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$, $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
7. $f(x,y,z) = x + y + z$, $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 2z^2 \leq 6, 0 \leq z \leq 2\}$.
8. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 1$, $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$.

Ejercicio 14. Sea $f(x,y,z) = x + y - z$. Estudiar los extremos absolutos y relativos de f con las condiciones

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{6} = 1 \quad , \quad x + y - 1 = 0.$$

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE CARTAGENA

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Ejercicio 1 *Determínese cuales de los siguientes conjuntos son abiertos y cuales son cerrados:*

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1\}$.
3. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0\}$.
4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x} > 1\}$.
5. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\}$.
6. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2\}$.
7. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
8. $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x} \leq 1\}$.
9. $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 > 1\}$.
10. $J = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \geq 2\}$.
11. $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \text{máx}\{|x|, |y|\} \leq 1\}$.
12. $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} < 1 \text{ y } x > 0\}$.

Ejercicio 2 Estudiar en cada caso la continuidad de la función

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

en donde $f(x,y)$ viene dada por

1. $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$.
2. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
3. $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.
4. $f(x,y) = \dfrac{x^3+xy}{x^2+y^2}$.
5. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2+y^4}$.
6. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.
7. $f(x,y) = \dfrac{x^2(x-y)}{x^2+y^2}$.
8. $f(x,y) = x + x^2y^2 \operatorname{sen}(y/x)$.
9. $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$.
10. $f(x,y) = \dfrac{x \operatorname{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.
11. $f(x,y) = \dfrac{x \operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.
12. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2+2}{x+y+1}$.