7.10. Calcular el desarrollo de Taylor de grado 2 en $x = 0$ de la función

$$f(x) = \int_0^x te^{-t}dt,$$

y utilizarlo para calcular aproximadamente $\int_0^{0,1} te^{-t}dt$. Dar una estimación del error cometido. (1–12–1997).

7.11. Calcular el siguiente límite funcional

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{\operatorname{sen} x^2} \text{ (14–2–1998).}$$

7.12. Calcular el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \dfrac{x+ax^3}{1+bx^2}}{\ln(x+1)} \text{ (2–7–1998).}$$

7.13. Usando el desarrollo de Taylor en $x = 0$ de $f(x) = e^x$, obtener $\sqrt[3]{e}$ con un error menor que 10^{-4}. (2–7–1998).

7.14. Utiliza un desarrollo de Taylor de orden 2 de la función $f(x) = \log x$ para aproximar el valor de $\log(1,1)$. Da una estimación del error cometido.

7.15. Calcula los límites siguientes:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^5 - x\log(1+x^4)}{\operatorname{sen}^3(x^2)}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3(x^2)}{x^5 - x\log(1+x^4)}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{[1-\cos^2(x^2)]\operatorname{sen}^3(x)}{x\log(1+x^6)}$ (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^3)}{1-\cos^3(x)}$

7.16. Calcula el límite siguiente utilizando desarrollos de Taylor

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)\operatorname{sen}(2x^4)}{x^3\log(1+3x^3)}$$

7.17. Calcula el límite siguiente usando desarrollos de Taylor:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x^4}{1-\cos(x^2)}$$

VIII. Cálculo integral: funciones reales de variable real

8.1. Calcular las siguientes integrales definidas:

(a) $\int_0^1 xe^x dx$

(b) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x dx$

(c) $\int_1^2 \log x dx$

(d) $\int_a^b x^p dx$, donde p es un número entero negativo.

8.2. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

(a) $F(x) = \int_0^x \left(1+t^2\right)^{-3} dt$

(b) $F(x) = \int_0^{x^2} \left(1+t^2\right)^{-3} dt$

(c) $F(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4} dt$

8.3. Siendo $f(x)$ una función continua, calcular las siguientes derivadas:

(a) $F(x) = \int_x^\pi f(t)\, dt$

(b) $F(x) = \int_x^\pi x f(t)\, dt$

(c) $F(x) = \int_x^{\operatorname{sen} x} f(t)\, dt$

(d) $F(x) = \int_x^{\operatorname{sen} x} \log x f(t)\, dt$

(e) $F(x) = \int_x^{\operatorname{sen} x} \log t f(t)\, dt$

8.4. Hallar los extremos relativos de la función

$$F(x) = \int_0^x te^{-t}dt.$$

8.5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y periódica, de periodo T, esto es, $f(x+T) = f(x)$ para todo número real x. Demostrar que la función definida por $F(x) = \int_x^{x+T} f(t)\, dt$ es constante.

8.6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que para todo par de números reales $a < b$, existe un número real c satisfaciendo que $a < c < b$, de manera que se cumple

$$\int_a^b f(t)\, dt = f(c)(b-a).$$

8.7. ¿Es posible calcular $\int_0^1 \log x dx$?

8.8. Halla el área de la región del plano S situada entre las gráficas de las funciones $f(x) = x(x-2)$ y $g(x) = x/2$, sobre el intervalo $[0,2]$.

8.9. Halla el área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = x^3 - 12x$ e $y = x^2$.

8.10. Halla el área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = x \operatorname{sen} x$ e $y = x$.

8.11. Halla el volumen del sólido generado al girar la región limitada por las gráficas de las curvas

$$y = x^3, \ x = 0, \ x = 1,$$

alrededor del eje x.

8.12. Halla el volumen del sólido generado al girar la región limitada por las gráficas de las curvas

$$y = 6x - x^2, \ y = 0,$$

alrededor del eje y.

8.13. Halla el volumen del sólido generado al girar el triángulo de vértices $(1,2)$, $(9,0)$, $(4,5)$, alrededor del eje x.

8.14. Halla el volumen del sólido generado al girar alrededor de la recta $0 = x + 1$, el recinto limitado por las curvas

$$y = (x+1)^{-1}, \ y = 0, \ x = 1, \ x = 0.$$

8.15. Calcular el área y el volumen de una circunferencia y una esfera de radio R.

8.16. Calcular el área de una elipse de semiejes a, b.

8.17. Calcular el volumen de un cilindro de altura h y radio de la base r.

8.18. Calcular el volumen de un cono de altura h y radio de la base r.

8.19. Calcula la longitud de una circunferencia de radio R.

8.20. Usar las reglas de trapecio y Simpson para calcular de forma aproximada las siguientes integrales con un error menor que 10^{-2} :

(a) $\int_0^1 e^{-x} dx$.

(b) $\int_0^1 x e^{-x} dx$.

(c) $\int_0^1 x^2 \operatorname{sen} x dx$.

(d) $\int_0^1 \left(\int_0^x \operatorname{sen} t dt \right) dx$.

(e) $\int_0^1 \operatorname{sen} x e^{-x} dx$.

8.21. Plantea la descomposición en fracciones simples (sin necesidad de calcular las constantes) de $\frac{p(x)}{q(x)}$, donde: $p(x) = x^2 + x + x$ y $q(x) = (x^2+4)^3(x-7)^2(x^2+x+1)$.

8.22. Calcula el área de la figura limitada por $xy = a^2$ y por $x + y = \frac{5}{2}a$, siendo a una constante estrictamente positiva.

IX. Cálculo integral: integración numérica e integrales impropias

9.1. Comprobar que la fórmula del trapecio es exacta para polinomios de grado 1, es decir, si $f(x)$ es un polinomio de grado 1, entonces para todo par de números reales $a < b$ se verifica:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{2}\left(f(a) + f(b)\right).$$

9.2. Comprobar que la fórmula de Simpson es exacta para polinomios de grado 3, es decir, si $f(x)$ es un polinomio de grado 3, entonces para todo par de números reales $a < b$ se verifica:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

9.3. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias, calculando aquellas que sean convergentes:

(a) $\int_2^\infty e^{2x}\left(2x^2 - 4x\right)dx$
(b) $\int_{-\infty}^0 e^{2x}\left(2x^2 - 4x\right)dx$
(c) $\int_1^\infty x\left(1 - x^4\right)^{-1}dx$
(d) $\int_0^{\sqrt{2}} x\left(x^2 - 1\right)^{-4/5}dx$
(e) $\int_{1/4}^1 (\sqrt{x} - 1)^{-2}\,dx$
(f) $\int_{-1}^1 (|x|)^{-1/2}\,dx$
(h) $\int_1^\infty e^{-x}\cos x dx$
(i) $\int_1^\infty \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}dx$
(j) $\int_0^1 \log x dx$
(k) $\int_1^\infty x^{-3}e^{1/x}dx$

9.4. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

(a) $\int_1^\infty \frac{e^{-x}\operatorname{sen} x}{\sqrt{x+1}}dx$
(b) $\int_1^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx$
(c) $\int_1^\infty \frac{1}{e^x+10}dx$
(d) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx$

(e) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x(1+e^x)}}dx$
(f) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}}dx$

X. Cálculo integral: funciones reales de varias variables

10.1. Calcular para $\Omega = [0,1] \times [0,3]$ las integrales

$$\text{(a) } \iint_\Omega xy\,dxdy. \quad \text{(b) } \iint_\Omega xe^y\,dxdy. \quad \text{(c) } \iint_\Omega y^2 \operatorname{sen} x\,dxdy.$$

10.2. Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que se indican:

a) $\iint_\Omega y\,dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
b) $\iint_\Omega (3y^3 + x^2)\,dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \}$.
c) $\iint_\Omega \sqrt{xy}\,dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq y\}$.
d) $\iint_\Omega ye^x\,dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$.
e) $\iint_\Omega y + \log x\,dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0{,}5 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$.

10.3. Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que a continuación se dan:

a) $\iint_\Omega (4 - y^2)\,dxdy$ en el recinto limitado por las ecuaciones $y^2 = 2x$ e $y^2 = 8 - 2x$.
b) $\iint_\Omega (x^4 + y^2)\,dxdy$ en el recinto limitado por $y = x^3$ e $y = x^2$.
c) $\iint_\Omega (x + y)\,dxdy$ en el recinto limitado por $y = x^3$ e $y = x^4$ con $-1 \leq x \leq 1$.
d) $\iint_\Omega (3xy^2 - y)\,dxdy$ en la región limitada por $y = |x|$, $y = -|x|$ y $x \in [-1,1]$.

10.4. Calcular la superficie de las siguientes regiones:

a) Círculo de radio R.
b) Elipse de semiejes a, b.
c) La región limitada por las ecuaciones $x^2 = 4y$ y $2y - x - 4 = 0$.
d) La región limitada por las ecuaciones $x + y = 5$ y $xy = 6$.
e) La región limitada por las ecuaciones $x = y$ y $x = 4y - y^2$.

10.5. Calcular el volumen de los siguientes sólidos:

a) El limitado por $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ y los planos de coordenadas.
b) El tronco limitado superiormente por $z = 2x + 3y$ e inferiormente por el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.
c) Esfera de radio R.

d) Cono de altura h y radio de la base R.
e) El tronco limitado superiormente por la ecuación $z = 2x + 1$ e inferiormente por el disco $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

10.6. Calcular cambiando a coordenadas polares:

a) $\int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$.
b) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\,dydx$.
c) $\int_{1/2}^{1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\,dydx$.
d) $\int_0^{1/2} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$.

10.7. Calcular para $\Omega = [0,1] \times [0,3] \times [-1,1]$ las integrales

$$\text{(a) } \iiint_\Omega xyz\,dxdydz. \quad \text{(b) } \iiint_\Omega xe^{y+z}\,dxdydz. \quad \text{(c) } \iiint_\Omega y^2 z^3 \operatorname{sen} x\,dxdydz.$$

10.8. Calcular las integrales que a continuación se piden en los recintos correspondientes:

a) $\iiint_\Omega (y^3 + z + x)\,dxdydz$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
b) $\iiint_\Omega (y \operatorname{sen} z + x)\,dxdydz$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq z \geq y^2,\ 0 \leq x, y \leq 1\}$.
c) $\iiint_\Omega x\,dxdydz$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \geq y^2 + x^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$.
d) $\iiint_\Omega yxz\,dxdydz$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -5 \leq z \leq y^2 + x,\ -1 \leq x, y \leq 1\}$.

10.9. Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por $z = 1$ e inferiormente por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

10.10. Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$, inferiormente por el plano $2x + 3y + z + 10 = 0$ y lateralmente por el cilindro circular $x^2 + y^2 + x = 0$.

10.11. Hallar el volumen del sólido limitado por los paraboloides de ecuaciones $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$.

10.12. Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie cilíndrica $x^2 + z = 4$, inferiormente por el plano $x + z = 2$ y lateralmente por los planos $y = 0$ e $y = 3$.

10.13. Haciendo uso de las coordenadas esféricas $x = r \operatorname{sen}\phi \cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$ y $z = r\cos\phi$, calcular:

a) El volumen de una esfera de radio R.
b) $\iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)\,dxdydz$ en el recinto $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.

c) El volumen del recinto del apartado (b).

10.14. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las ecuaciones $z = x^2 + 4y^2$, el plano $z = 0$ y lateralmente por los cilindros $x = y^2$ y $x^2 = y$.

10.15. Calcular $\iint_\Omega e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy$ siendo Ω el triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta $x + y = 1$.

10.16. Calcular el volumen comprendido entre los cilindros $z = x^2$ y $z = 4 - y^2$.

10.17. Calcular el volumen del balón de Rugby de ecuaciones $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

10.18. Calcular $\iint_\Omega xydxdy$ donde Ω es la región limitada por las curvas $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$ e $y = x + 1$. Indicación: hacer el cambio de variable $x = u - v$, $y = 2u - v$.

10.19. Calcular el volumen encerrado por un cilindro de radio $R/2$ y una esfera de radio R cuyo centro está situado en un punto de la superficie del cilindro. Indicación: hacer el cambio a coordenadas cilíndricas.

10.20. Calcular

$$\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

donde Ω es la región limitada por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, donde $0 < b < a$. Indicación: hacer el cambio a coordenadas esféricas.

10.21. *Coordenadas cilíndricas.*

a) Escribe la relación entre coordenadas cartesianas y coordenadas cilíndricas: $\Phi(r, \theta, z) = \dots$.

b) ¿En qué rango máximo (abierto) varían r, θ y z para que Φ sea biyectiva?.

c) Calcula el jacobiano de Φ y calcula el valor absoluto de su determinante (este determinante lo tienes que calcular explícitamente).

d) Calcula el volumen del sólido $\Omega = \{(x, y, z) : 16 \leq x^2 + y^2 \leq 81, x \leq 0, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$.

10.22. *Coordenadas esféricas.*

a) Escribe la relación entre coordenadas cartesianas y coordenadas esféricas: $\Phi(r, \theta, \phi) = \dots$.

b) ¿En qué rango máximo (abierto) varían r y los ángulos θ y ϕ para que Φ sea biyectiva?.

c) Calcula el jacobiano de Φ y di cuál es el valor absoluto de su determinante (este determinante no hace falta que lo calcules explícitamente).

d) Calcula el volumen del sólido $\Omega = \{(x, y, z) : 25 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49, y \geq 0\}$.

e) Calcula la integral $\iiint_\Omega \operatorname{sen}[(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}]dxdydz$, donde Ω es el conjunto del apartado anterior.

10.23. Calcula el volumen limitado por $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = x^2$.

10.24. Dadas constantes $0 < a < b$, calcula el volumen limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 = z^2$, suponiendo además $z \geq 0$.

10.25. Calcula el área de la figura limitada por $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ con $x^2 + y^2 \geq a^2$.