1.1. Primitivas inmediatas

Sólo sabiendo derivar podemos conocer la primitiva de una amplia variedad de funciones, el conocimiento de dichas primitivas (elementales) junto con algunas técnicas serán suficientes para poder calcular primitivas de una amplia variedad de funciones.

1. $\int a^x \ \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\log a} + K, \qquad a > 0, a \neq 1, I = (-\infty, +\infty),$
2. $\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + K, \qquad I = (-\infty, +\infty)$
3. $\int x^r \,\mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + K, \qquad r \neq -1, I = (0, +\infty),$
4. $\int x^{-1} \,\mathrm{d}x = \log x + K, \qquad I = (0, +\infty),$
5. $\int \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x = -\cos x + K, \qquad I = (-\infty, +\infty),$
6. $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + K, \qquad I = (-\infty, +\infty),$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \operatorname{arcsen} x + K = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cos} x + K, \qquad I = (-1, +1),$
8. $\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \arctan x + K, \qquad I = (-\infty, +\infty),$
9. $\int (1 + \tan^2 x) \,\mathrm{d}x = \int \sec^{-2} x \,\mathrm{d}x = \tan x + K, \qquad I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),$
10. $\int \operatorname{cosec}^2 x \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotan} x + K, \qquad I = (0, \pi),$

A continuación se relacionan algunas propiedades útiles para calcular primitivas de otras funciones partiendo de las anteriores.

1.2. Utilizar la regla de la cadena para las primitivas

Proposición. *Sean f y g funciones derivables definidas en el intervalo (a,b). Entonces se verifica la fórmula:*

$$\int f'(g(x))g'(x)\ \mathrm{d}x = f\circ g(x)+K.$$

Esta proposición permite ampliar la relación de primitivas dadas anteriormente. En efecto, para cualquier función derivable f se tienen las siguientes primitivas:

1. $\int a^{f(x)}f'(x)\ \ \mathrm{d}x = \frac{a^{f(x)}}{\log a}+K, \qquad a>0, a\neq 1,$
2. $\int e^{f(x)}f'(x)\ \mathrm{d}x = e^{f(x)}+K,$
3. $\int f(x)^r f'(x)\ \mathrm{d}x = \frac{f(x)^{r+1}}{r+1}+K, \qquad r\neq -1,$
4. $\int f(x)^{-1}f'(x)\ \mathrm{d}x = \log f(x)+K,$
5. $\int \operatorname{sen} f(x)f'(x)\ \mathrm{d}x = -\cos f(x)+K,$
6. $\int \cos f(x)f'(x)\ \mathrm{d}x = \operatorname{sen} f(x)+K,$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}}f'(x)\ \mathrm{d}x = \operatorname{arcsen} f(x)+K = \frac{\pi}{2}-\arccos f(x)+K,$
8. $\int \frac{1}{1+f(x)^2}f'(x)\ \mathrm{d}x = \arctan f(x)+K,$
9. $\int(1+\tan^2 f(x))f'(x)\ \mathrm{d}x = \int \sec^{-2} f(x)\ \mathrm{d}x = \tan f(x)+K,$

10. $\int f'(x)\,\mathrm{cosec}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{cotan}\, f(x) + K$,

Ejemplo. *La integral de la función tangente se encuentra en la situación de la proposición anterior. En efecto:*

$$\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\log|\cos x| \text{ \textit{en todo intervalo tal que} } \cos x \neq 0.$$

1.3. Integración de sumas y por partes

Proposición. *Dadas funciones* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *y un número real* λ*, se verifica:*

- $\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x,$
- $\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x.$

Ejemplo (Integración de polinomios).

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_p x^p)\,\mathrm{d}x = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots a_p \frac{x^{p+1}}{p+1} + K.$$

Proposición (Regla de derivación por partes). *Dadas funciones* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *derivables, se verifica:*

$$\int f(x) g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ejemplo.

$\int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x = \int \operatorname{sen} x(-\cos x)' \, \mathrm{d}x = -\operatorname{sen} x \cos x + \int (\operatorname{sen} x)' \cos x \, \mathrm{d}x =$
$-\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x,$

de donde:

$\int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x = -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, \mathrm{d}x.$

Por lo tanto:

$2 \int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x = -\operatorname{sen} x \cos x + x$ *y*

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x = -\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} + \frac{x}{2}.}$$

Ejercicio.

Obtener una fórmula de recurrencia para calcular la primitiva $\int \frac{1}{(1+x^r)^r} \, \mathrm{d}x$.

2. Integración por cambio de variable

Supongamos que queremos encontrar la primitiva de una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $\int f(x)\ \mathrm{d}x$. En este apartado se trata de ver cómo simplificar dicho cálculo a través de un cambio de variable. Supongamos que $t(x)$ denota una función invertible y derivable y calculemos su derivada $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = t'(x)$, que *formalmente* podemos escribir como $\mathrm{d}t = t'(x)\ \mathrm{d}x$.

A través de unos cálculos justificativos que el alumno puede seguir en el Libro de J. A. Fernández Viña (Análisis matemático, tomo 1, página 254) se puede obtener la igualdad:

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int f(t)\frac{1}{t'(x)}\ \mathrm{d}t,$$

donde en el segundo miembro de la igualdad una ver hecha la primitiva hay que substituir t por $t(x)$.

Ejemplo. *Vamos a calcular mediante un cambio de variable la primitiva* $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$*, consideraremos el cambio* $t = \sqrt{x}$*.*

Efectuando el cambio, tendremos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2t}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = 2\arctan t = 2\arctan\sqrt{x}.$$

3. Primitivas de fracciones racionales

El método para calcular primitivas de fracciones racionales se basa en la descomposición de una fracción racional en fracciones simples. Recordemos que una *fracción racional* en la variable x no es más que un cociente de polinomios en la variable x. En cambio, una *fracción racional simple* o una *fracción simple* es una fracción racional de una de las dos formas siguientes:

1. una fracción racional cuyo numerador es una constante y cuyo denominador es un polinomio de grado 1,

2. una fracción racional cuyo numerador es un polinomio de grado 1 y cuyo denominador es un polinomio de grado 2 sin raíces reales.

Teorema. *Toda fracción racional* $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *se descompone como:*

$$F(x) = r(x) + \sum_{k=1}^{\alpha_1} \frac{A_k}{(x-a_1)^k} + \cdots + + \sum_{k=1}^{\alpha_m} \frac{A_k}{(x-a_n)^k},$$

donde los a_i *son las raíces de* $Q(x) = 0$ *y* α_i *son las multiplicidades. Finalmente los* A_i *son números reales determinados y* $r(x)$ *un polinomio.*

Teorema. *Toda fracción racional* $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *se descompone como:*

$$F(x) = r(x) + \sum_{k=1}^{\alpha_1} \frac{A_k^1}{(x-a_1)^k} + \cdots + + \sum_{k=1}^{\alpha_m} \frac{A_k^n}{(x-a_n)^k} +$$

$$\sum_{k=1}^{\beta_1} \frac{B_k^1 x + C_k^1}{\{[x-(b_1+c_1 i)][x-(b_1-c_1 i)]\}^k}$$

$$+ \cdots + \sum_{k=1}^{\beta_l} \frac{B_k^l x + C_k^l}{\{[x-(b_l+c_l i)][x-(b_l-c_l i)]\}^k},$$

donde los a_i *son las raíces reales de* $Q(x) = 0$ *y* α_i *son las multiplicidades de dichas raíces, los* $b_j + c_j i$ *son las raíces complejas de* $Q(x) = 0$ *y* β_j *son las multiplicidades de dichas raíces. Finalmente los* A_i, B_i *y* C_i *son números reales determinados y* $r(x)$ *un polinomio.*

Apoyándose en el teorema anterior se puede deducir un método para hacer primitivas de fracciones racionales. El método consistirá en obtener la descomposición anterior y calcular primitivas sumando a sumando.

4. Primitivas de expresiones que contienen $\frac{ax+b}{cx+d}$

Sea F una fracción racional del tipo:

$$F\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right),$$

de forma que n es el mínimo común múltiplo de los números $n_1, n_2, \dots, n_k$. Entonces el cambio de variable

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d},$$

transforma la primitiva $\int F \, \mathrm{d}x$ en la primitiva de una fracción racional en la variable t.

Ejercicio.

Resolver las primitivas[1]:

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \, \mathrm{d}x$,
2. $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}} \, \mathrm{d}x$,
3. $\int \frac{1}{(1+x)^2} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2} \, \mathrm{d}x$.

[1]Indicación: los cambios necesarios serán tomar t igual a $\sqrt[6]{x}$, $\sqrt{1-x}$ y $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

5. Las funciones hiperbólicas

Recordamos que las funciones seno y coseno se introducen utilizando la función exponencial compleja de la forma que sigue:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}.$$

Si en vez de considerar la exponencial compleja consideramos la exponencial real obtendremos las *funciones coseno y seno hiperbólicos* definidas concretamente como siguen:

$$\operatorname{Ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{Sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2},$$

es fácil ver que ambas funciones son continuas y están definidas sobre todo $\mathbb{R}$. Además, la función coseno hiperbólico es siempre mayor que cero ya que la exponencial siempre es mayor que cero. Por lo tanto podemos dividir la función seno hiperbólico por la función coseno hiperbólico y obtenemos la función tangente hiperbólica, continua y definida sobre todo $\mathbb{R}$:

$$\operatorname{Th} x = \frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x}.$$

A partir de estas definiciones se pueden obtener sin dificultad las propiedades básicas de las funciones hiperbólicas, propiedades análogas (que no iguales) a las de las funciones trigonométricas:

Teorema.

$$
\begin{array}{rl}
\mathrm{Ch}\,(-x) = \mathrm{Ch}\,x & \qquad \cos\,(-x) = \cos x \\
\mathrm{Sh}\,(-x) = -\mathrm{Sh}\,x & \qquad \mathrm{sen}\,(-x) = -\mathrm{sen}\,x \\
\mathrm{Th}\,(-x) = -\mathrm{Th}\,(x) & \qquad \tan(-x) = -\tan x \\
\mathrm{Ch}^{\,2}x - \mathrm{Sh}^{\,2}x = 1 & \qquad \cos^{\,2}x + \mathrm{sen}^{\,2}x = 1 \\
1 - \mathrm{Th}^{\,2}x = \dfrac{1}{\mathrm{Ch}^{\,2}} & \qquad 1 + tan^2x = \dfrac{1}{\cos^{\,2}x} \\
\mathrm{Ch}\,(x+y) = \mathrm{Ch}\,x\mathrm{Ch}\,y + \mathrm{Sh}\,x\mathrm{Sh}\,y & \qquad \cos\,(x+y) = \cos x \cos y - \mathrm{sen}\,x\mathrm{sen}\,y \\
\mathrm{Ch}\,(2x) = \mathrm{Ch}^{\,2}x + \mathrm{Sh}^{\,2}x & \qquad \cos\,(2x) = \cos^{\,2}x - \mathrm{sen}^{\,2}x \\
\mathrm{Ch}\,(x-y) = \mathrm{Ch}\,x\mathrm{Ch}\,y - \mathrm{Sh}\,x\mathrm{Sh}\,y & \qquad \cos\,(x-y) = \cos x \cos y + \mathrm{sen}\,x\mathrm{sen}\,y \\
\mathrm{Sh}\,(x+y) = \mathrm{Sh}\,x\mathrm{Ch}\,y + \mathrm{Ch}\,x\mathrm{Sh}\,y & \qquad \mathrm{sen}\,(x+y) = \mathrm{sen}\,x\cos y + \cos x\mathrm{sen}\,y \\
\mathrm{Sh}\,(2x) = 2\mathrm{Sh}\,x\mathrm{Ch}\,x & \qquad \mathrm{sen}\,(2x) = 2\mathrm{sen}\,x\cos x \\
\mathrm{Sh}\,(x-y) = \mathrm{Sh}\,x\mathrm{Ch}\,y - \mathrm{Ch}\,x\mathrm{Sh}\,y & \qquad \mathrm{sen}\,(x-y) = \mathrm{sen}\,x\cos y - \cos x\mathrm{sen}\,y \\
\mathrm{Th}\,(x+y) = \dfrac{\mathrm{Th}\,x + \mathrm{Th}\,y}{1 + \mathrm{Th}\,x\mathrm{Th}\,y} & \qquad \tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \\
\mathrm{Th}\,(x-y) = \dfrac{\mathrm{Th}\,x - \mathrm{Th}\,y}{1 - \mathrm{Th}\,x\mathrm{Th}\,y} & \qquad \tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}
\end{array}
$$

Además de estas propiedades que dependen únicamente de la definición de las funciones hiperbólicas, por la propia definición estas funciones son derivables, viniendo recogidas sus propiedades en lo que sigue:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Sh}'x &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{Ch} x,\\
\operatorname{Ch}'x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{Sh} x,\\
\operatorname{Th}'x &= \left(\frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{Ch} x \operatorname{Ch} x - \operatorname{Sh} x \operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Resumiendo:

$$
\boxed{\operatorname{Sh}'x = \operatorname{Ch} x, \quad \operatorname{Ch}'x = \operatorname{Sh} x, \quad \operatorname{Th}'x = \tfrac{1}{\operatorname{Ch}^2 x}.}
$$

Ahora que conocemos las derivadas de las funciones hiperbólicas se puede ver fácilmente que $\operatorname{Sh}'x$ y $\operatorname{Th}'x$ son números reales estrictamente mayores que cero, luego ambas funciones son estrictamente crecientes y por lo tanto aplicaciones inyectivas. Estudiando los límites cuando x tiende a $\pm\infty$ conoceremos entre qué intervalos ambas funciones son biyectivas.

Observación.

$$
\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Sh} x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{Sh} x = -\infty,
$$

$$
\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Th} x = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{Th} x = -1.
$$

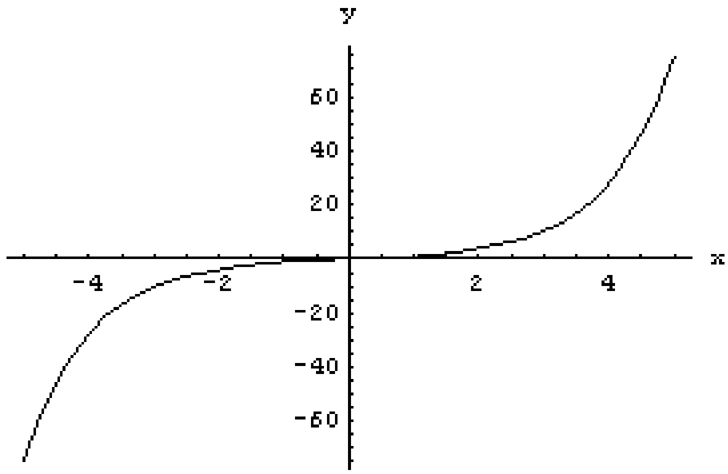

Figura 1: Función seno hiperbólico

Teorema. *Las funciones:*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Sh}\,:\,\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & \mathrm{Sh}\,x \end{array} \quad y \quad \begin{array}{rcl} \mathrm{Th}\,:\,\mathbb{R} & \longrightarrow & (-1,1) \\ x & \rightarrow & \mathrm{Th}\,x \end{array}$$

son biyectivas.

Sin embargo, la función coseno hiperbólico no es una aplicación biyectiva cuando la consideramos definida sobre todo $\mathbb{R}$, es más, mediante el uso de las derivadas de la función Ch se puede ver que dicha función tiene un mínimo en $x = 0$.

5.1. Los argumentos hiperbólicos de las funciones hiperbólicas

Hemos visto ya que las funciones seno y tangente hiperbólicas son invertibles, con lo cual nos podemos plantear la búsqueda de sus funciones

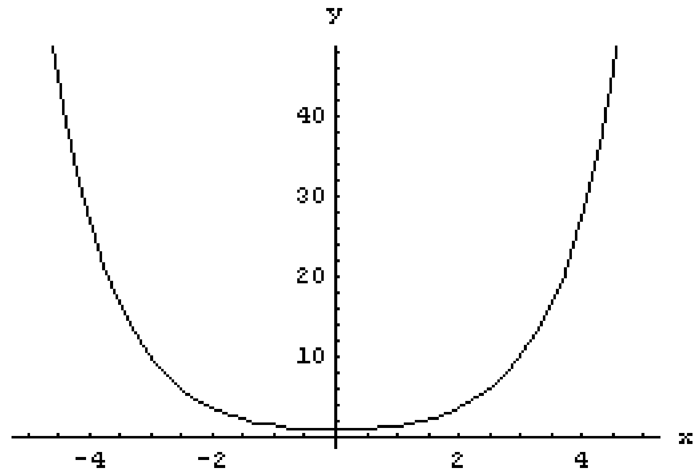

Figura 2: Función coseno hiperbólico

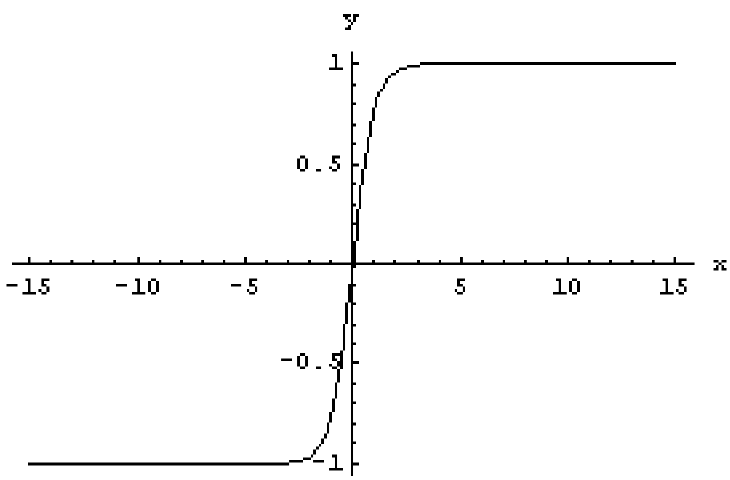

Figura 3: Función tangente hiperbólica

inversas, éstas funciones se llamarán *argumento del seno hiperbólico* y *argumento de la tangente hiperbólica*.

Aunque la función coseno hiperbólico no sea una biyección, si la consideramos definida sólo sobre la semirrecta positiva o negativa, sí que es un biyección y tiene sentido buscar el *argumento del coseno hiperbólico*.

$$\boxed{\text{Argumento del seno hiperbólico}}$$

Partiendo de la igualdad $y = \operatorname{Sh} x$, encontrar el argumento del seno hiperbólico se trata de despejar x en función de y. Para ello seguimos los siguientes pasos:

$$\operatorname{Sh} x = y \Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Rightarrow e^x - e^{-x} = 2y.$$

Ahora hacemos el cambio de variable $z = e^x$, de donde $\frac{1}{z} = e^{-x}$:

$$\operatorname{Sh} x = e^x - e^{-x} = 2y \Rightarrow z - \frac{1}{z} = 2y \Rightarrow z^2 - 2yz - 1 = 0 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow z = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{1 + y^2}.$$

Ahora hay que observar que el signo menos anterior no tiene sentido ya que para él, z sería negativo, sin embargo z debe ser positivo por ser igual a e^x. Entonces:

$$\operatorname{ArgSh} y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

$\boxed{\text{Argumento del coseno hiperbólico}}$

Partiendo ahora de la igualdad $y = \operatorname{Ch} x$, encontrar el argumento del coseno hiperbólico se trata de despejar x en función de y. Para ello procedemos como antes:

$$\operatorname{Ch} x = y \Rightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \Rightarrow e^x + e^{-x} = 2y.$$

Ahora hacemos el cambio de variable $z = e^x$, de donde $\frac{1}{z} = e^{-x}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ch} x = e^x + e^{-x} = 2y \Rightarrow z + \frac{1}{z} = 2y \Rightarrow z^2 - 2yz + 1 = 0 \qquad (3) \\ \Rightarrow z = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}. \end{aligned}$$

En este caso el signo menos sí tiene sentido porque no hace que z sea negativo. Entonces:

$$\operatorname{ArgCh} y = \log(y \pm \sqrt{y^2 - 1}).$$

$\boxed{\text{Argumento de la tangente hiperbólica}}$

Observemos para empezar que la tangente hiperbólica sólo estará definida en el intervalo $(-1, 1)$, ya que la tangente hiperbólica sólo toma valores en dicho intervalo. Partimos de la igualdad $y = \operatorname{Th} x$ y hacemos en los cálculo que siguen el cambio de variable $z = e^x$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Th} x = y \Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \Rightarrow z - \frac{1}{z} = (z + \frac{1}{z})y \Rightarrow \frac{z^2 - 1}{z} = \frac{z^2 + 1}{z} y \\ \Rightarrow (y - 1)z^2 = -1 - y \Rightarrow z^2 = \frac{1 + y}{1 - y} \Rightarrow x = \log \sqrt{\frac{1 + y}{1 - y}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{ArgTh} y = \log \sqrt{\frac{1 + y}{1 - y}}.$$

5.2. Las derivadas de las funciones hiperbólicas y sus análogas trigonométricas

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Sh}'x &= \operatorname{Ch} x, & \operatorname{sen}'x &= \cos x \\
\operatorname{Ch}'x &= \operatorname{Sh} x, & \cos'x &= -\operatorname{sen} x \\
\operatorname{Th}'x &= \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x}, & \tan' x &= \frac{1}{\cos^2} \\
\operatorname{ArgSh}'x &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \operatorname{arcsen}'x &= \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}} \\
\operatorname{ArgCh}'x &= \frac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}}, & \operatorname{arc}\cos' x &= \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}} \\
\operatorname{ArgTh}'x &= \frac{1}{1-x^2}, & \arctan' x &= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

6. Primitivas de expresiones que contienen $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$

En esta sección vamos a analizar cómo obtener primitivas del estilo $\int f(\cos x, \operatorname{sen} x)\ \mathrm{d}x$, donde f es una fracción racional y el intervalo donde queremos calcular la primitiva será $(-\pi, \pi)$.

6.1. El cambio de variable $x = 2\arctan t$

El cambio de variable $x = 2\arctan t$, es decir, $t = \tan\frac{x}{2}$, pone en correspondencia el intervalo $(-\pi, \pi)$ con toda la recta real. Al realizar este cambio será de utilidad tener en cuenta las relaciones trigonométricas usuales que dan las siguientes igualdades:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}. \tag{5}$$

Al realizar este cambio de variable y tener en cuenta las relaciones anteriores convertiremos la primitiva inicial en la de una fracción racional en la variable t:

$$\int f\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Aunque este cambio nos asegura el éxito en la resolución de primitivas, otros pueden conllevar una resolución más simple. Veámoslo.

6.2. El cambio $t = \operatorname{sen} x$

Si la fracción racional $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es del estilo $f_1(\operatorname{sen} x)\cos x$ entonces el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$ nos lleva a una resolución más sencilla. Conviene notar que estaremos ante este caso cuando al dividir

$f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ por $\cos x$ nos quedan sólo potencias pares de $\cos x$, pues basta poner $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$.

6.3. El cambio $t = \cos x$

Si la fracción racional $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es del estilo $f_1(\cos x)\operatorname{sen} x$ entonces el cambio de variable $t = \cos x$ nos lleva a una resolución más sencilla que utilizando el primer cambio de la tangente del ángulo mitad. Conviene notar que estaremos ante este caso cuando al dividir $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ por $\operatorname{sen} x$ nos quedan sólo potencias pares de $\operatorname{sen} x$, pues basta poner $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.

6.4. El cambio $t = \tan x$

En el caso en el que la fracción racional $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ sea del estilo $f_1(\tan x)$ entonces se hace el cambio $\tan x = t$ y la primitiva $\int f_1(\tan x)\,\mathrm{d}x$ queda como

$$\int \frac{f_1(\tan x)}{1+\tan^2 x}(1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{f_1(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Estaremos en este caso si al sustituir $\operatorname{sen} x$ por $\cos x \tan x$ en la expresión $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ nos quedan sólo cosenos elevados a exponentes pares, pues basta poner entonces $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$.

6.5. Casos particulares

Un caso interesante de las primitivas de funciones trigonométricas son las de la forma

$$\int \cos^n x \operatorname{sen}^m x \, \mathrm{d}x,$$

donde los exponentes m y n son naturales. Utilizando las fórmulas de trigonometría puede expresarse $\cos^n x$ como una suma en la que intervienen cosenos múltiplos de x, y $\operatorname{sen}^m x$ como una suma en la que intervienen cosenos y senos múltiplos de x. Al efectuar la multiplicación de dichas sumas aparecerán productos de la forma $\operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta x)$ y productos de la forma $\cos(\alpha x)\operatorname{sen}(\beta x)$. Para calcular las integrales de estos productos se descomponen en sumas utilizando las fórmulas:

$$2\operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta x) = \operatorname{sen}[(\alpha+\beta)x] + \operatorname{sen}[(\alpha-\beta)x] \tag{6}$$

$$2\cos(\alpha x)\cos(\beta x) = \cos[(\alpha+\beta)x] + \cos[(\alpha-\beta)x] \tag{7}$$

Por otro lado, otra situación interesante es aquella en la que disponemos de una fracción racional en las variables $\cos(r_1 x), \cos(r_2 x), \ldots, \cos(r_n x)$, $\operatorname{sen}(s_1 x), \operatorname{sen}(s_2 x), \ldots, \operatorname{sen}(s_m x)$, siendo los números $r_1, r_2, \ldots, r_n$, $s_1, s_2, \ldots, s_m$ son racionales. Tomemos el mínimo común múltiplo de los denominadores de dichos números, p, y hagamos el cambio $x = pt$. Con lo que obtendremos una primitiva donde intervienen cosenos y senos múltiplos enteros de t. Finalmente, cada una de las funciones anteriores se puede expresar como un polinomio de $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$, con lo que hemos pasado al primer caso de este apartado.

Ejercicio.

Resuelve:

1. $\int \frac{1}{5+4\cos x}\, \mathrm{d}x$ usando el cambio $\tan(x/2) = t$,

2. $\int \frac{1+\cos^2 x}{cos x(1+\operatorname{sen}^2 x)}\, \mathrm{d}x$ usando el cambio $\operatorname{sen} x = t$,

3. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}\, \mathrm{d}x$ usando el cambio $\tan x = t$.

7. Primitivas de expresiones que contienen $\sqrt{ax^2 + 2bx + c}$

En esta sección se estudian las primitivas del estilo $\int f(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c})\, \mathrm{d}x$, donde f es una fracción racional y a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

En estas primitivas siempre hay que tener en cuenta la identidad:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a},$$

lo cual sugiere hacer el cambio de variable $t = x + b/a$ transformándose la primitiva de partida en:

$$\int f(t - b/a, \sqrt{at^2 + d})\, \mathrm{d}t.$$

En el caso que d sea cero, a debe ser positivo y la primitiva toma la forma $\int f(t - b/a, \sqrt{a}t)\ \mathrm{d}t$, que no plantea dificultades. Por lo tanto consideraremos que estamos en el caso $d \neq 0$ y veremos la forma de proceder distinguiendo tres casos.

1. $d < 0$ y $a > 0$. En este caso hacemos el cambio de variable $\sqrt{\frac{a}{-d}}t = u$ y obtenemos la nueva primitiva
$$\int f\Big(\sqrt{\frac{-d}{a}}u - \frac{b}{a}, \sqrt{-d}\sqrt{u^2-1}\Big)\ \mathrm{d}u = \int f_1(u, \sqrt{u^2-1})\ \mathrm{d}u,$$
donde f_1 es una fracción racional. Esta última integral se resuelve fácilmente haciendo el cambio $u = \operatorname{Ch} v$.

2. $d > 0$ y $a > 0$. En este caso hacemos el cambio de variable $\sqrt{\frac{-a}{d}}t = u$ y obtenemos la nueva primitiva
$$\int f\Big(\sqrt{\frac{d}{-a}}u - \frac{b}{a}, \sqrt{d}\sqrt{1-u^2}\Big)\ \mathrm{d}u = \int f_2(u, \sqrt{1-u^2})\ \mathrm{d}u,$$
donde f_2 es una fracción racional. Esta última integral se resuelve fácilmente haciendo el cambio $u = \operatorname{sen} v$.

3. $d > 0$ y $a > 0$. En este último caso se hace el cambio $\sqrt{\frac{a}{d}}t = u$ y obtenemos la nueva primitiva
$$\int f\Big(\sqrt{\frac{d}{a}}u - \frac{b}{a}, \sqrt{d}\sqrt{u^2+1}\Big)\ \mathrm{d}u = \int f_1(u, \sqrt{u^2+1})\ \mathrm{d}u,$$
donde f_1 es una fracción racional. Esta última integral se resuelve fácilmente haciendo el cambio $u = \operatorname{Sh} v$.