Tema 3: Producto escalar

1 Definición de producto escalar

Un producto escalar en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V es una aplicación $f : V \times V \to \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades:

1. **Bilineal:**

$$\begin{array}{crcl} (i) & f(u+u',v) & = & f(u,v)+f(u',v) \text{ para todo } u,u',v \in V \\ (i') & f(u,v+v') & = & f(u,v)+f(u,v') \text{ para todo } u,v,v' \in V \\ (ii) & f(\alpha u,v) & = & f(u,\alpha v)=\alpha f(u,v) \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ y todo } u,v \in V \end{array}$$

2. **Simétrica:**

   Para todo $u, v \in V$ se tiene que $f(u,v) = f(v,u)$.

3. **Definida positiva:**

   Para todo vector $u \in V$ no nulo se tiene que $f(u,u) > 0$.

La expresión $f(u,v)$ es un escalar al que se le denomina **producto escalar de** u **y** v. La **notación habitual** que emplearemos para esto será $u \cdot v$ (hay autores que utilizan para esto la notación $< u, v >$). Con esta notación la definición de producto escalar quedaría reescrita del siguiente modo:

1. **Bilineal:**

$$\begin{array}{crcl} (i) & (u+u')\cdot v & = & u\cdot v+u'\cdot v \text{ para todo } u,u',v \in V \\ (i') & u\cdot(v+v') & = & u\cdot v+u\cdot v' \text{ para todo } u,v,v' \in V \\ (ii) & \alpha u\cdot v & = & u\cdot \alpha v=\alpha(u\cdot v) \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ y todo } u,v \in V \end{array}$$

2. **Simétrica:**

   Para todo $u, v \in V$ se tiene que $u \cdot v = v \cdot u$.

3. **Definida positiva:**

   Para todo vector $u \in V$ no nulo se tiene que $u \cdot u > 0$.

Al par $(V, \cdot)$, formado por un $\mathbb{R}$-espacio vectorial junto con un producto escalar se le denomina **espacio vectorial euclídeo**. Incluso suele hablarse del espacio vectorial euclídeo V sin mencionar el producto escalar, que se supone sobreentendido.

Propiedad: En un espacio vectorial euclídeo $(V, \cdot)$ se cumple que:

Para cualquier vector $v \in V$ se tiene que

$$v \cdot 0 = 0$$

En conclusión el único modo de que se anule $v \cdot v$ es para el vector nulo $v = 0$. Pues si $v \neq 0$ entonces

$$v \cdot v > 0$$

Ejemplo 1.1 *1. El* ***producto escalar usual (canónico*** *o* ***euclídeo)*** *en $\mathbb{R}^n$.*

Dados $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ se define el producto escalar euclídeo en $\mathbb{R}^n$ del siguiente modo:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot (y_1, y_2, ..., y_n) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + ... + x_n \cdot y_n$$

2. He aquí un ejemplo de un producto escalar (distinto del euclídeo) definido en $\mathbb{R}^3$:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1 \cdot y_1 + 5x_2 \cdot y_2 + 2x_3 \cdot y_3$$

3. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar euclídeo obtenemos

$$(2, 1, -3) \cdot (5, 2, 4) = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 = 10 + 2 - 12 = 0$$

y con el producto escalar visto en el ejemplo 2) obtenemos

$$(2, 1, -3) \cdot (5, 2, 4) = 2 \cdot 5 + 5 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \cdot 4 = 10 + 10 - 24 = -4$$

Una forma de caracterizar a un producto escalar (suponiendo que se cumple la bilinealidad) es la siguiente:

Propiedad: Sea "$\cdot$": $V \times V \to \mathbb{R}$ una aplicación bilineal, con V un espacio vectorial real, y sea $B = \{v_1, v_2 ..., v_n\}$ una base de V. Entonces "$\cdot$" es un producto escalar si y sólo si la matriz

$$\begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & .... & v_1 \cdot v_n \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & .... & v_2 \cdot v_n \\ .... & .... & .... & .... \\ v_n \cdot v_1 & v_n \cdot v_2 & .... & v_n \cdot v_n \end{pmatrix}$$

es simétrica y definida positiva (esto último significa que **los menores principales de la matriz** [los que se forman para cada $k = 1, 2, ..., n$ tomando las k primeras filas y las k primeras columnas] **son todos positivos**).

Ejemplo 1.2 *Determinar si las siguientes aplicaciones bilineales son o no productos escalares:*

1. En $\mathbb{R}^2$

$$(x, y) \cdot (x', y') = 2xx' + 2xy' + 2yy'$$

Como la matriz que se obtiene tomando la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$\begin{pmatrix} (1,0) \cdot (1,0) & (1,0) \cdot (0,1) \\ & \\ (0,1) \cdot (1,0) & (0,1) \cdot (0,1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 \\ & \\ 2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0 & 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y ésta no es simétrica, se tiene que no es un producto escalar.

2. *En* $\mathbb{R}^2$

$$(x,y)\cdot(x',y') = xx' + xy' + yx' + yy'$$

La matriz que se obtiene tomando la base

$$\{(2,0),(1,-1)\}$$

de $\mathbb{R}^2$ *es*

$$\begin{pmatrix} (2,0)\cdot(2,0) & (2,0)\cdot(1,-1) \\ \\ (1,-1)\cdot(2,0) & (1,-1)\cdot(1,-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 2\cdot 0 + 0\cdot 2 + 0\cdot 0 & 2\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 1 + 0\cdot(-1) \\ \\ 1\cdot 2 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 2 + (-1)\cdot 0 & 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que ésta es simétrica. Los determinantes principales valen

$$4 \qquad y \qquad \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

luego no es definida positiva. Así no es un producto escalar.

3. *En* $\mathbb{R}^3$

$$(x,y,z)\cdot(x',y',z') = xx' + 2xy' + 2yx' - yz' - zy' + 5yy'$$

Tomando base canónica de $\mathbb{R}^3$ *obtenemos la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y ésta es simétrica. Los determinantes principales valen

$$1 > 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 > 0 \ y \ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

luego no es definida positiva. Así no es un producto escalar.

4. *En* $\mathbb{R}^2$

$$(x,y)\cdot(x',y') = 4xx' + 2yy' - 2xy' - 2yx'$$

A partir de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ *se obtiene la matriz*

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

que es simétrica. Los determinantes principales valen

$$4 > 0 \ y \ \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

luego es definida positiva. Así la aplicación bilineal es un producto escalar.

5. *En* $\mathbb{R}^3$

$$(x,y,z)\cdot(x',y',z') = 2xx' - 2xy' - 2yx' + xz' + zx' + 3yy' + 6zz'$$

Tomando base canónica de $\mathbb{R}^3$ *obtenemos la matriz*

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

y ésta es simétrica. Los determinantes principales valen

$$2 > 0, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0 \ y \ \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 9 > 0$$

luego es definida positiva. Así es un producto escalar.

6. *En* $\mathbb{R}_2[x]$*, el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que* 2*, y tomando* $[a,b]$ *un intervalo cualquiera de la recta real, se define el producto escalar*

$$p(x)\cdot q(x) = \int_a^b p(x)q(x)dx$$

En el apéndice del tema está comprobado que es un producto escalar. Mediante dicho producto realicemos el siguiente ejemplo, suponiendo que estamos trabajando con el intervalo $[0,1]$*:*

$$x\cdot(x^2+2) = \int_0^1 x\cdot(x^2+2)dx = \int_0^1 (x^3+2x)dx = [\frac{x^4}{4}+x^2]\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = (\frac{1}{4}+1) - 0 = \frac{5}{4}$$

2 Norma asociada a un producto escalar

Sea $(V,\cdot)$ un espacio vectorial euclídeo y $v \in V$. Se llama **norma** (**módulo** o **longitud**) del vector v (asociada al producto escalar anterior) al número real no negativo

$$\|v\| = +\sqrt{v\cdot v}$$

A este valor lo llamaremos **norma** del vector v.

Observación 2.1 *La norma asociada al producto escalar euclídeo de* $\mathbb{R}^n$ *está dada para un vector* $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *por*

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

(la llamaremos ***norma euclídea****).*

Se dice que un vector es **unitario** cuando tiene norma 1. A partir de cualquier vector no nulo siempre puede construirse un vector unitario dividiendo por la norma.

Ejemplo 2.2 *Con el producto escalar usual en* $\mathbb{R}^3$ *la norma del vector* $u = (2, -3, 0)$ *vale*

$$\|u\| = \|(2,-3,0)\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{4+9+0} = \sqrt{13}.$$

Entonces el vector

$$\frac{u}{\|u\|} = (\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, 0)$$

es unitario, pues

$$\begin{aligned} \left\|\frac{u}{\|u\|}\right\| &= \left\|(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, 0)\right\| = \sqrt{(\frac{2}{\sqrt{13}})^2 + (-\frac{3}{\sqrt{13}})^2 + 0^2} = \\ &= \sqrt{\frac{4}{13} + \frac{9}{13} + 0} = \sqrt{\frac{13}{13}} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3 *Utilizando la norma asociada al producto escalar en* $\mathbb{R}^2$ *dado mediante la expresión*

$$(x,y)\cdot(x',y') = 4xx' + 2yy' - 2xy' - 2yx'$$

la norma del vector $(2,1)$ *es*

$$\begin{gathered} \|(2,1)\| = \sqrt{(2,1)\cdot(2,1)} = \\ = \sqrt{4\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 2} = \sqrt{10} \end{gathered}$$

mientras que la norma euclídea del mismo vector es

$$\|(2,1)\| = \sqrt{(2,1)\cdot(2,1)} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

3 Ortogonalidad

Se dice que dos vectores u y v de un espacio vectorial euclídeo son **ortogonales** (o **perpendiculares**) cuando

$$u \cdot v = 0.$$

Un sistema de vectores se dice que es un sistema **ortogonal** de vectores cuando los vectores son ortogonales dos a dos. Si además todos los vectores son unitarios entonces se dirá que el sistema es **ortonormal**.

Ejemplo 3.1 *1.* 3 *vectores* u_1, u_2, u_3 *constituyen un sistema ortogonal si*

$$\begin{aligned} u_1 \cdot u_2 &= 0 \\ u_1 \cdot u_3 &= 0 \\ u_2 \cdot u_3 &= 0 \end{aligned}$$

2. 2 *vectores* v_1, v_2 *forman un sistema ortonormal si*

$$\begin{aligned} v_1 \cdot v_2 &= 0 \\ \|v_1\| &= 1 \\ \|v_2\| &= 1 \end{aligned}$$

3. Con el producto escalar usual en $\mathbb{R}^4$ *los vectores*

$$(1, 2, -3, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 3, 2, 0)$$

constituyen un sistema ortogonal.

4. Con el producto escalar usual en $\mathbb{R}^3$ *los vectores*

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, 0, 1)$$

5. Utilizando la norma asociada al producto escalar en $\mathbb{R}^2$ *dado mediante la expresión*

$$(x, y) \cdot (x', y') = 4xx' + 2yy' - 2xy' - 2yx'$$

los vectores $(2, 1)$ *y* $(1, 3)$ *son ortogonales pues*

$$(2, 1) \cdot (1, 3) = 4 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = 8 + 6 - 12 - 2 = 0$$

mientras que con el producto escalar euclídeo no lo son, pues

$$(2, 1) \cdot (1, 3) = 2 + 3 = 5$$

Una base de un espacio vectorial euclídeo V que además es un sistema ortogonal (respectivamente ortonormal) de vectores se llamará **base ortogonal** de V (respectivamente **base ortonormal** de V).

Propiedades: En un espacio vectorial euclídeo se verifican las siguientes propiedades:

1. Un sistema formado por un solo vector es un sistema ortogonal.

2. **La base canónica de $\mathbb{R}^n$ es una base ortonormal** de este espacio vectorial, si estamos considerando el producto escalar euclídeo en $\mathbb{R}^n$.

3. Un sistema ortogonal de vectores no nulos es un sistema LI de vectores. En consecuencia un sistema ortonormal de vectores es un sistema LI de vectores.

4. La ortogonalidad es una propiedad que se conserva por CL, en particular por múltiplos. De este modo, si u es un vector ortogonal v entonces es ortogonal a todo múltiplo de v (del mismo modo se cumple que si u no es ortogonal a v entonces no es ortogonal a ningún múltiplo de v). Como casos particularmente interesantes tenemos los siguientes:

   (a) Si tenemos una base ortogonal podemos multiplicar cada vector por un escalar no nulo que el resultado sigue siendo una base ortogonal.

   (b) Si en una base ortogonal de un espacio vectorial euclídeo de V dividimos cada vector por su norma, entonces el sistema resultante de vectores es una base ortonormal de V.

3.1 Método de ortogonalización de Gram-Schmidt

Sea

$$\{u_1, u_2, ..., u_n\}$$

una base de un espacio vectorial euclídeo V. **Vamos a construir una base ortogonal** de V a partir de la base dada.

Empezamos cogiendo

$$w_1 = u_1$$

Después buscamos un vector de la forma

$$w_2 = u_2 + \alpha_{21} w_1$$

donde α_{21} es un escalar del cuerpo, el único para el que se cumple que w_2 es ortogonal a w_1. Para hallarlo se hace el producto escalar por el vector w_1 en la igualdad anterior, y obtenemos la igualdad

$$w_2 \cdot w_1 = 0 = u_2 \cdot w_1 + \alpha_{21} w_1 \cdot w_1$$

de donde deducimos que

$$\alpha_{21} = -\frac{u_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}$$

El tercer vector será de la forma

$$w_3 = u_3 + \alpha_{31} w_1 + \alpha_{32} w_2$$

donde α_{31} y α_{32} son escalares del cuerpo, los únicos para los que se cumple que w_3 es ortogonal a w_1 y a w_2. Para hallarlos se hace el producto escalar en la igualdad anterior, por un lado por el vector w_1, y obtenemos

$$w_3 \cdot w_1 = 0 = u_3 \cdot w_1 + \alpha_{31} w_1 \cdot w_1 + \alpha_{32} w_2 \cdot w_1$$

de donde deducimos que

$$\alpha_{31} = -\frac{u_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}$$

(tengamos en cuenta que w_2 y w_1 son ortogonales, luego su producto escalar se anula). Y por otro lado, ahora toca cambiar los papeles de w_1 y w_2 y multiplicar escalarmente por este último. Entonces obtenemos

$$w_3 \cdot w_2 = 0 = u_3 \cdot w_2 + \alpha_{31} w_1 \cdot w_2 + \alpha_{32} w_2 \cdot w_2$$

de donde deducimos que

$$\alpha_{32} = -\frac{u_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2}$$

(tengamos en cuenta que w_2 y w_1 son ortogonales, luego su producto escalar se anula).

Supongamos que tenemos definidos vectores ortogonales $w_1, w_2, ..., w_{k-1}$, para $k-1 < n$. Entonces buscaremos un nuevo vector de la forma

$$w_k = u_k + \alpha_{k1} w_1 + ... + \alpha_{kk-1} w_{k-1}$$

donde los $\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, ..., \alpha_{kk-1}$ se hallan imponiendo que w_k es ortogonal a $w_1, w_2, ..., w_{k-1}$, respectivamente, de una forma similar a la anterior (o sea, multiplicando escalarmente w_k por $w_1, w_2, ..., w_{k-1}$). Así cada uno de los escalares puede calcularse mediante la expresión

$$\alpha_{ki} = -\frac{u_k \cdot w_i}{w_i \cdot w_i}$$

De este modo se obtiene una base ortogonal

$$\{w_1, w_2, ..., w_n\}$$

de V. Además, a partir de esta base ortogonal puede obtenerse una ortonormal

$$\{w'_1, w'_2, ..., w'_n\}$$

tomando

$$w'_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$$

para cada i, es decir, dividiendo cada vector de la base ortogonal por su propia norma.

Observación 3.2 *Si en algún momento nos sale un vector con fracciones en la base ortogonal que se va obteniendo, puede reemplazarse éste (en ese momento) por cualquier múltiplo suyo (como ya dijimos en la última propiedad), para así eliminar las fracciones.*

Ejemplo 3.3 *Con el producto escalar usual hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir de la base*

$$\{u_1 = (1,1,1), u_2 = (2,1,0), u_3 = (1,0,0)\}$$

En primer lugar pongamos

$$w_1 = u_1 = (1,1,1).$$

Ahora ponemos

$$w_2 = u_2 + \alpha w_1 \text{ (pongo } \alpha_{21} = \alpha)$$

donde

$$\alpha = -\frac{u_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} = -\frac{(2,1,0)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)} = -\frac{3}{3} = -1$$

De este modo obtenemos que

$$w_2 = (2,1,0) - (1,1,1) = (1,0,-1).$$

Finalmente necesitamos hallar un vector

$$w_3 = u_3 + \beta w_1 + \gamma w_2 \text{ (pongo } \alpha_{31} = \beta \text{ y } \alpha_{32} = \gamma)$$

donde sabemos que

$$\beta = -\frac{u_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} = -\frac{(1,0,0)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)} = -\frac{1}{3}$$

y

$$\gamma = -\frac{u_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} = -\frac{(1,0,0)\cdot(1,0,-1)}{(1,0,-1)\cdot(1,0,-1)} = -\frac{1}{2}$$

Entonces

$$\begin{aligned} w_3 &= (1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1}{2}(1,0,-1) = \\ &= (1,0,0) + (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) + (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) \\ &= (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}) = (\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}) \end{aligned}$$

Así hemos obtenido una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$*:*

$$\{(1,1,1),(1,0,-1),(\frac{1}{6},-\frac{1}{3},\frac{1}{6})\}$$

Como lo que se pedía era una base ortonormal es suficiente con dividir cada uno de estos vectores por su norma. Como

$\|w_1\| = \sqrt{3}$	$\|w_2\| = \sqrt{2}$	$\|w_3\| = \frac{1}{\sqrt{6}}$

obtenemos la base $\{w_1', w_2', w_3'\}$ *de* $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} w_1' &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = (\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}), w_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) = (\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ w_3' &= \sqrt{6}(\frac{1}{6},-\frac{1}{3},\frac{1}{6}) = (\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}) = (\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}) \end{aligned}$$

Nota: *Podríamos haber tomado la base ortogonal*

$$\{(1,1,1),(1,0,-1),(1,-2,1)\}$$

obtenida de la anterior multiplicando el último vector por 6*. De aquí habríamos obtenido al final la misma base ortonormal.*

Ejemplo 3.4 *Utilizando el producto escalar en* $\mathbb{R}^2$ *dado mediante la expresión*

$$(x,y)\cdot(x',y') = 4xx' + 2yy' - 2xy' - 2yx'$$

hallemos una base ortonormal a partir de la base

$$\{(1,0),(0,1)\}$$

Tomamos

$$w_1 = (1,0)$$

Ahora consideramos

$$w_2 = (0,1) + \alpha(1,0),$$

donde

$$\alpha = -\frac{(0,1)\cdot(1,0)}{(1,0)\cdot(1,0)} = -\frac{-2\cdot 1\cdot 1}{4\cdot 1\cdot 1} = \frac{1}{2}$$

De este modo obtenemos que

$$w_2 = (0,1) + \frac{1}{2}(1,0) = (\frac{1}{2},1)$$

Así hemos obtenido una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$*:*

$$\{(1,0),(\frac{1}{2},1)\}$$

Multiplicamos el último vector por 2 *y seguimos teniendo una base ortogonal, en este caso*

$$\{(1,0),(1,2)\}$$

Como lo que se pedía era una base ortonormal es suficiente con dividir cada uno de estos vectores por su norma (la norma asociada a este producto escalar) y se tiene que

$$\|(1,0)\| = \sqrt{4 \cdot 1 \cdot 1} = 2$$

$$\|(1,2)\| = \sqrt{4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1} = \sqrt{4} = 2$$

Finalmente obtenemos la base ortonormal $\{w'_1, w'_2\}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *(con el producto escalar con el que estamos trabajando), con*

$w'_1 = \frac{1}{2}(1,0) = (\dfrac{1}{2}, 0)$	$w'_2 = \frac{1}{2}(1,2) = (\dfrac{1}{2}, 1)$

Ejemplo 3.5 *Con el producto escalar usual, hallar una base ortononormal de*

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0\}$$

Es sencillo hallar una base. A partir de la ecuación implícita de U *que se da,* $x - 2y = 0$*, se obtienen las ecuaciones paramétricas de dicho subespacio*

$$\begin{cases} x = 2y \\ y = y \end{cases}$$

y por tanto una base de U *es* $\{(2,1)\}$*. Al estar formada por un solo vector esta base de* U *es ortogonal. Y como* $\|(2,1)\| = \sqrt{5}$ *se tiene que una base ortonormal de* U *es* $\{(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})\}$*.*

Ejemplo 3.6 *Con el producto escalar usual, hallar una base ortogonal de*

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + 3t = 0, y + z + 2t = 0\}$$

Nos han dado W *mediante ecuaciones implícitas. Pasemos a paramétricas. Basta observar que el sistema está escalonado con los pivotes* x *e* y*, luego los parámetros son* z *y* t*. Despejando tenemos*

$$\begin{cases} x = 2z - t \\ y = -z - 2t \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

y por tanto una base de W *es*

$$\{(2,-1,1,0), (-1,-2,0,1)\}$$

Emplearemos ahora el método de Gram-Schmidt para ortogonalizarla. Empezamos considerando

$$w_1 = (2,-1,1,0)$$

Ahora consideramos

$$w_2 = (-1,-2,0,1) + \alpha(2,-1,1,0)$$

donde

$$\alpha = -\frac{(-1,-2,0,1) \cdot (2,-1,1,0)}{(2,-1,1,0) \cdot (2,-1,1,0)} = -\frac{0}{6} = 0$$

De este modo obtenemos que

$$w_2 = (-1,-2,0,1) + 0(2,-1,1,0) = (-1,-2,0,1)$$

Así hemos obtenido una base ortogonal de W:

$$\{(2,-1,1,0),(-1,-2,0,1)\}$$

Observemos que es la misma base que habíamos obtenido. Esto es casual y se debe a que los vectores ya eran ortogonales entre sí. Por esta misma razón nos sale $\alpha = 0$.

3.2 Subespacio ortogonal

Propiedad: Sea V un espacio vectorial euclídeo y W un subespacio suyo. Entonces el conjunto de los vectores de V que son ortogonales a todos los de W es un subespacio vectorial de V, llamado el **subespacio ortogonal** de W, y será denotado por $W^{\perp}$. Es decir, tenemos que

$$W^{\perp} = \{v \in V | v \cdot w = 0 \; \forall w \in W\}$$

Observación 3.7 *Además se tiene que $V = W + W^{\perp}$ y que esta suma es directa, es decir,*

$$V = W \bigoplus W^{\perp}$$

Luego

$$\dim V = \dim W \bigoplus W^{\perp} = \dim W + \dim W^{\perp}$$

En las condiciones anteriores, conocida una base (o más generalmente, un SG) de W, se cumple que un vector $v \in V$ es ortogonal a todos los vectores de W si y sólo si es ortogonal a todos los vectores de dicha base (o SG). A partir de ahí se puede **obtener $W^{\perp}$, el subespacio ortogonal de W**. Veámoslo en el caso más sencillo en que $V = \mathbb{R}^n$.

Un vector $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ pertenece a $W^{\perp}$ si y sólo si es ortogonal a todos los vectores de la base

$$B = \{(a_{11}, ..., a_{1n}), ..., (a_{k1}, ..., a_{kn})\}$$

de W, es decir, si y sólo si se cumplen las siguientes ecuaciones (que serán las ecuaciones implícitas de $W^{\perp}$)

$$\begin{aligned} (a_{11}, ..., a_{1n}) \cdot (x_1, ..., x_n) &= 0 \\ &.... \\ (a_{k1}, ..., a_{kn}) \cdot (x_1, ..., x_n) &= 0 \end{aligned}$$

que dependerán del producto escalar con el que estemos. **En el caso del producto escalar euclídeo las ecuaciones implícitas de $W^{\perp}$** quedarán así

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n &= 0 \\ &.... \\ a_{k1}x_1 + ... + a_{kn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

En el caso del producto escalar euclídeo, de modo simétrico puede obtenerse que si el subespacio inicial está dado por ecuaciones implí citas entonces el subespacio ortogonal tiene como sistema generador las filas de la matriz de coeficientes del sistema anterior.

Ejemplo 3.8 *1. Supongamos que tenemos el subespacio de* $\mathbb{R}^4$ *siguiente*

$$W =< (1,-2,0,3),(-3,0,2,0),(5,0,-1,0) >$$

Entonces, respecto al producto escalar euclídeo, tenemos que $W^\perp$ *tiene por ecuaciones implícitas*

$$\left\{\begin{array}{l} (1,-2,0,3)\cdot(x,y,z,t)=0 \\ (-3,0,2,0)\cdot(x,y,z,t)=0 \\ (5,0,-1,0)\cdot(x,y,z,t)=0 \end{array}\right.$$

es decir

$$\left\{\begin{array}{c} x-2y+3t=0 \\ -3x+2z=0 \\ 5x-z=0 \end{array}\right.$$

2. Supongamos que tenemos el subespacio de $\mathbb{R}^3$ *siguiente*

$$U =< (-3,2,1),(2,0,-1) >$$

Entonces, respecto al producto escalar euclídeo tenemos que $U^\perp$ *tiene por ecuaciones implícitas*

$$\left\{\begin{array}{c} -3x+2y+z=0 \\ 2x-z=0 \end{array}\right.$$

3. Supongamos que tenemos el subespacio de $\mathbb{R}^3$ *siguiente*

$$T \equiv -x+2y-z=0$$

Entonces, respecto al producto escalar euclídeo tenemos que

$$T^\perp =< (-1,2,-1) >$$

4. Supongamos que tenemos el subespacio de $\mathbb{R}^3$ *siguiente*

$$S =< (1,3,-2),(-1,0,3) >$$

Entonces, respecto al producto escalar siguiente

$$(x,y,z)\cdot(x',y',z') = xx' + 2yy' + 4zz'$$

tenemos que $S^\perp$ *tiene por ecuaciones implícitas*

$$\left\{\begin{array}{l} (x,y,z)\cdot(1,3,-2)=0 \\ (x,y,z)\cdot(-1,0,3)=0 \end{array}\right.$$

es decir,

$$\left\{\begin{array}{c} x+6y-8z=0 \\ -x+12z=0 \end{array}\right.$$

Supongamos ahora que con este mismo espacio vectorial euclídeo ($\mathbb{R}^3$ con este producto escalar) tomamos el subespacio H de $\mathbb{R}^3$ cuyas ecuaciones implícitas son

$$2x + y - z = 0$$

Entonces para obtener $H^\perp$ debemos disponer de una base de H. Es inmediato que unas ecuaciones paramétricas de H son

$$\left\{\begin{array}{c} x = x \\ y = z - 2x \\ z = z \end{array}\right.$$

(tomando y como pivote y las otras dos variables como parámetros). Así pues una base de H es

$$\{(1, -2, 0), (0, 1, 1)\}$$

Esto nos da lugar a que unas ecuaciones implícitas de $H^\perp$ son

$$\left\{\begin{array}{c} (x, y, z) \cdot (1, -2, 0) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (0, 1, 1) = 0 \end{array}\right.$$

es decir,

$$\left\{\begin{array}{c} x - 4y = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{array}\right.$$

3.3 Proyección ortogonal<

Sea W un subespacio de un espacio vectorial euclídeo V. Debido a que $V = W \bigoplus W^\perp$, todo vector del espacio puede ponerse de modo único como suma de un vector de W y otro de $W^\perp$. Sea $v \in V$ y supongamos que tenemos

$$v = v_1 + v_2$$

con $v_1 \in W$ y $v_2 \in W^\perp$. Entonces a v_1 lo llamaremos **proyección ortogonal** de v sobre W. Además, este vector cumple que $v - v_1 \in W^\perp$ y es el único de todos los vectores de W que cumple esta propiedad, es decir, si $w \in W$ cumple que $v - w \in W^\perp$, entonces $w = v_1$ (la proyección ortogonal de v sobre W).

Veamos a continuación un **método para hallar la proyección ortogonal** de un vector sobre un subespacio:

Sea $v \in V$ y $W \leq V$. Supongamos que tenemos una **base ortogonal**

$$B = \{w_1, w_2, ..., w_k\}$$

de W (siempre es posible hallarla a partir de una base cualquiera mediante el método de Gram-Schmidt). Entonces puede escribirse $v = v_1 + v_2$, donde v_1 es la proyección ortogonal de v sobre W y $v_2 \in W^\perp$. Entonces v_1 se pone como CL de los vectores de B en la forma

$$v_1 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_k w_k$$

Si multiplicamos escalarmente v por cada w_i, a partir de la igualdad $v = v_1 + v_2$, obtenemos que

$$v \cdot w_i = v_1 \cdot w_i + v_2 \cdot w_i = \alpha_1 w_1 \cdot w_i + \alpha_2 w_2 \cdot w_i + ... + \alpha_k w_k \cdot w_i = \alpha_i w_i \cdot w_i$$

(observemos que $v_2 \cdot w_i = 0$, ya que $v_2 \in W^\perp$ y $w_i \in W$; igualmente $w_j \cdot w_i = 0$ si $j \neq i$, ya que son vectores de una base ortogonal). De aquí despejamos el valor del escalar

$$\alpha_i = \frac{v \cdot w_i}{w_i \cdot w_i}$$

Entonces tenemos determinado v_1, la proyección ortogonal de v sobre W, sustituyendo el valor de cada α_i, es decir,

$$v_1 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_k w_k = \frac{v \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 + \frac{v \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 + ... + \frac{v \cdot w_k}{w_k \cdot w_k} w_k$$

Si B es una **base ortonormal** entonces para cada i se tiene que $w_i \cdot w_i = \|w_i\|^2 = 1$ con lo que la fórmula de los escalares queda más sencillamente así:

$$\alpha_i = v \cdot w_i$$

y por tanto

$$v_1 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_k w_k = (v \cdot w_1) w_1 + (v \cdot w_2) w_2 + ... + (v \cdot w_k) w_k$$

Observación 3.9 *Hemos elegido una base ortogonal u ortonormal para que el cálculo necesario para hallar los escalares α_i sea lo más sencillo posible. Pero previo a esto probablemente sea necesario hallar esta base ortogonal u ortonormal, lo cual requiere también operaciones. Es posible inicialmente coger una base cualquiera de W (no necesariamente ortogonal ni ortonormal) y realizar, como hemos hecho anteriormente, los productos escalares de un modo similar al anterior. La diferencia está en que ahora no podemos despejar directamente los valores de los α_i que ahora aparecerían, pues su valor se hallará resolviendo el sistema de ecuaciones que aparece, ya que éstos serán las incógnitas de este sistema. También es cierto que de esta manera nos ahorraríamos aplicar el método de Gram-Schmidt a la hora de hallar la base ortogonal. Así que puede elegirse la base de la forma que cada cual considere oportuna.*

Ejemplo 3.10 *Consideremos en el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, el subespacio*

$$W = < (2, 0, -1), (6, 0, 1) >$$

y el vector

$$v = (2, -1, 3)$$

Vamos a hallar la proyección ortogonal de v sobre W.

Sabemos que $v = v_1 + v_2$, para ciertos $v_1 \in W$ y $v_2 \in W^\perp$. En esta situación v_1 es la proyección ortogonal de v sobre W. Tenemos que hallar una base de W. En este caso es inmediato que los vectores $u_1 = (2, 0, -1)$ y $u_2 = (6, 0, 1)$ nos sirven como base de W. Entonces sabemos que $v_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$. Pues bien, si multiplicamos escalarmente v con cada uno de estos vectores obtenemos por un lado que

$$v \cdot u_1 = (v_1 + v_2) \cdot u_1 = v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_1 = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \cdot u_1 + 0 = \alpha_1 u_1 \cdot u_1 + \alpha_2 u_2 \cdot u_1$$

de donde, calculando los productos escalares

$v \cdot u_1 = (2,-1,3) \cdot (2,0,-1) = 1$
$u_1 \cdot u_1 = (2,0,-1) \cdot (2,0,-1) = 5$
$u_2 \cdot u_1 = (6,0,1) \cdot (2,0,-1) = 11$

deducimos que

$$1 = 5\alpha_1 + 11\alpha_2$$

y por otro lado que

$$v \cdot u_2 = (v_1 + v_2) \cdot u_2 = v_1 \cdot u_2 + v_2 \cdot u_2 = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \cdot u_2 + 0 = \alpha_1 u_1 \cdot u_2 + \alpha_2 u_2 \cdot u_2$$

de donde, hallando ahora los productos

$v \cdot u_2 = (2,-1,3) \cdot (6,0,1) = 15$
$u_1 \cdot u_2 = (2,0,-1) \cdot (6,0,1) = 11$
$u_2 \cdot u_2 = (6,0,1) \cdot (6,0,1) = 37$

deducimos que

$$15 = 11\alpha_1 + 37\alpha_2$$

Entonces resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 1 &= 5\alpha_1 + 11\alpha_2 \\ 15 &= 11\alpha_1 + 37\alpha_2 \end{aligned}$$

obtenemos que

$\alpha_1 = -2$	$\alpha_2 = 1$

Así, la proyección ortogonal del vector v sobre el subespacio W es

$$v_1 = -2 \cdot (2,0,-1) + 1 \cdot (6,0,1) = (2,0,3)$$

Ejemplo 3.11 *Consideremos en el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, el subespacio*

$$S =< (1,0,0,1), (1,-1,2,1) >$$

y el vector

$$v = (0,1,3,0)$$

Vamos a hallar la proyección ortogonal de v sobre S.

Sabemos que $v = v_1 + v_2$, para ciertos $v_1 \in S$ y $v_2 \in S^\perp$. En esta situación v_1 es la proyección ortogonal de v sobre S. Tenemos que hallar una base de S. En este caso es inmediato que los vectores $u_1 = (1,0,0,1)$ y $u_2 = (1,-1,2,1)$ nos sirven como base de S. Entonces sabemos que $v_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$. Pues bien, si multiplicamos escalarmente v con cada uno de estos vectores obtenemos por un lado que

$$v \cdot u_1 = (v_1 + v_2) \cdot u_1 = v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_1 = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \cdot u_1 + 0 = \alpha_1 u_1 \cdot u_1 + \alpha_2 u_2 \cdot u_1$$

de donde, calculando los productos escalares

$v \cdot u_1 = (0,1,3,0) \cdot (1,0,0,1) = 0$
$u_1 \cdot u_1 = (1,0,0,1) \cdot (1,0,0,1) = 2$
$u_2 \cdot u_1 = (1,-1,2,1) \cdot (1,0,0,1) = 2$

deducimos que

$$0 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2$$

y por otro lado que

$$v \cdot u_2 = (v_1 + v_2) \cdot u_2 = v_1 \cdot u_2 + v_2 \cdot u_2 = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \cdot u_2 + 0 = \alpha_1 u_1 \cdot u_2 + \alpha_2 u_2 \cdot u_2$$

de donde, hallando ahora los productos

$v \cdot u_2 = (0,1,3,0) \cdot (1,-1,2,1) = 5$
$u_1 \cdot u_2 = (1,0,0,1) \cdot (1,-1,2,1) = 2$
$u_2 \cdot u_2 = (1,-1,2,1) \cdot (1,-1,2,1) = 7$

deducimos que

$$5 = 2\alpha_1 + 7\alpha_2$$

Entonces resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 5 &= 2\alpha_1 + 7\alpha_2 \end{aligned}$$

obtenemos que

$\alpha_1 = -1$	$\alpha_2 = 1$

Así, la proyección ortogonal del vector v sobre el subespacio S es

$$v_1 = -1 \cdot (1,0,0,1) + 1 \cdot (1,-1,2,1) = (0,-1,2,0)$$

Otra forma de hacerlo sería a partir de una base ortogonal de S. Utilizando el método de Gram-Schmidt tomemos

$$w_1 = u_1 = (1,0,0,1)$$

Busquemos ahora un vector de la forma

$$w_2 = u_2 + \alpha w_1$$

de donde sabemos que debe ser

$$\alpha = -\frac{w_1 \cdot u_2}{w_1 \cdot w_1} = -\frac{(1,0,0,1) \cdot (1,-1,2,1)}{(1,0,0,1) \cdot (1,0,0,1)} = -\frac{2}{2} = -1$$

Entonces

$$w_2 = (1,-1,2,1) - (1,0,0,1) = (0,-1,2,0)$$

Entonces

$$v_1 = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2$$

y las ecuaciones que obtendríamos con la base ortogonal $\{w_1, w_2\}$ de S serían

$$\begin{aligned} v \cdot w_1 &= \beta_1 w_1 \cdot w_1 + \beta_2 w_2 \cdot w_1 = \beta_1 w_1 \cdot w_1 \\ v \cdot w_2 &= \beta_1 w_1 \cdot w_2 + \beta_2 w_2 \cdot w_2 = \beta_2 w_2 \cdot w_2 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{v \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} = \frac{(0,1,3,0) \cdot (1,0,0,1)}{(1,0,0,1) \cdot (1,0,0,1)} = \frac{0}{2} = 0 \\ \beta_2 &= \frac{v \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} = \frac{(0,1,3,0) \cdot (0,-1,2,0)}{(0,-1,2,0) \cdot (0,-1,2,0)} = \frac{5}{5} = 1 \end{aligned}$$

Entonces

$$v_1 = 0 \cdot (1,0,0,1) + 1 \cdot (0,-1,2,0) = (0,-1,2,0)$$

Ejemplo 3.12 *Consideremos en el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, el subespacio*

$$T = < (1,0,0,1), (1,-1,2,1) >$$

y el vector

$$v = (2,2,1,0)$$

Vamos a hallar la proyección ortogonal de v sobre T.

Sabemos que $v = v_1 + v_2$, para ciertos $v_1 \in T$ y $v_2 \in T^\perp$. En esta situación v_1 es la proyección ortogonal de v sobre T. Tenemos que hallar una base de T. En este caso es inmediato que los vectores $u_1 = (1,0,0,1)$ y $u_2 = (1,-1,2,1)$ nos sirven como base de T. Entonces sabemos que $v_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$. Pues bien, si multiplicamos escalarmente v con cada uno de estos vectores obtenemos por un lado que

$$v \cdot u_1 = (v_1 + v_2) \cdot u_1 = v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_1 = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \cdot u_1 + 0 = \alpha_1 u_1 \cdot u_1 + \alpha_2 u_2 \cdot u_1$$

de donde, calculando los productos escalares

$$\begin{aligned} v \cdot u_1 &= (2,2,1,0) \cdot (1,0,0,1) = 2 \\ u_1 \cdot u_1 &= (1,0,0,1) \cdot (1,0,0,1) = 2 \\ u_2 \cdot u_1 &= (1,-1,2,1) \cdot (1,0,0,1) = 2 \end{aligned}$$

deducimos que

$$2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2$$

y por otro lado que

$$v \cdot u_2 = (v_1 + v_2) \cdot u_2 = v_1 \cdot u_2 + v_2 \cdot u_2 = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \cdot u_2 + 0 = \alpha_1 u_1 \cdot u_2 + \alpha_2 u_2 \cdot u_2$$

de donde, hallando ahora los productos

$v \cdot u_2 = (2,2,1,0) \cdot (1,-1,2,1) = 2$
$u_1 \cdot u_2 = (1,0,0,1) \cdot (1,-1,2,1) = 2$
$u_2 \cdot u_2 = (1,-1,2,1) \cdot (1,-1,2,1) = 7$

deducimos que

$$2 = 2\alpha_1 + 7\alpha_2$$

Entonces resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 2 &= 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 2 &= 2\alpha_1 + 7\alpha_2 \end{aligned}$$

obtenemos que

$$\boxed{\alpha_1 = 1 \mid \alpha_2 = 0}$$

Así, la proyección ortogonal del vector v sobre el subespacio T es

$$v_1 = 1 \cdot (1,0,0,1) + 0 \cdot (1,-1,2,1) = (1,0,0,1)$$

Otra forma de hacerlo sería a partir de una base ortogonal de T. En el ejemplo anterior la tenemos ya calculada y es

$$\{w_1, w_2\} = \{(1,0,0,1), (0,-1,2,0)\}$$

Entonces $v_1 = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2$ y las ecuaciones que obtendríamos con la base ortogonal serían

$$\begin{aligned} v \cdot w_1 &= \beta_1 w_1 \cdot w_1 + \beta_2 w_2 \cdot w_1 = \beta_1 w_1 \cdot w_1 \\ v \cdot w_2 &= \beta_1 w_1 \cdot w_2 + \beta_2 w_2 \cdot w_2 = \beta_2 w_2 \cdot w_2 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{v \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} = \frac{(2,2,1,0) \cdot (1,0,0,1)}{(1,0,0,1) \cdot (1,0,0,1)} = \frac{2}{2} = 1 \\ \beta_2 &= \frac{v \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} = \frac{(2,2,1,0) \cdot (0,-1,2,0)}{(0,-1,2,0) \cdot (0,-1,2,0)} = \frac{0}{5} = 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$v_1 = 1 \cdot (1,0,0,1) + 0 \cdot (0,-1,2,0) = (1,0,0,1)$$

Ejemplo 3.13 *Consideremos en el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar definido por*

$$(x,y,z) \cdot (x',y',z') = 2xx' + yy' + 3zz'$$

el subespacio

$$U = \{(x,y,z) : x - y - z = 0\}$$

Se pide:

1. *Hallar una base ortogonal de U.*

2. *Determinar $U^\perp$.*

3. *Obtener la proyección ortogonal sobre U del vector*

$$v = (6,-6,-10)$$