

# Problemas espacio Euclideo :

(1)

① De los siguientes productos definidos sobre los espacios vectoriales  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^3$ , determinar cuáles de ellos son productos escalares:

(a)  $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

(b)  $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1^2 y_1^2 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

(c)  $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 x_2 + 4x_2 y_2 + 4x_3 y_3$

(d)  $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$

② Dado el siguiente producto escalar sobre  $\mathbb{R}^2$

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2$$

calcular su matriz de Gram respecto a la base canónica  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  y la base  $B = \{ \vec{e}_1 + \vec{e}_2, 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \}$

③ Sobre el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  considérese los siguientes productos escalares dados por sus matrices de Gram respecto de la base canónica:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_1 = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_2 = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

(a) Calcular la norma de los vectores  $(3, 2, 1)$  y  $(-1, -8, 0)$  usando los productos escalares anteriores.

(b) Obtener las matrices de Gram de los productos

escalares  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  respecto de la base (2)

$$B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}.$$

(4) Sea  $V$  un espacio vectorial sobre el cual se tiene definido un producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de forma que para la base  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$  se verifica:

$$\begin{array}{lll} \langle u_1, u_1 \rangle = 1 & \langle u_1, u_2 \rangle = 1 & \langle u_1, u_3 \rangle = 0 \\ \langle u_2, u_2 \rangle = 3 & \langle u_2, u_3 \rangle = -1 & \langle u_3, u_3 \rangle = 1 \end{array}$$

Se pide calcular:

(a) El producto escalar de los vectores  $u = u_1 + 3u_2 - u_3$  y  $v = u_1 - u_2 + u_3$ , así como el ángulo que forman.

(b) Una base ortonormal a partir de  $B$ .

(c) El valor de  $\alpha$  para que el vector  $u = \alpha u_1 + u_2$  sea unitario.

(d) El valor de  $\alpha$  para que los vectores  $u = \alpha u_1 + u_2$  y  $v = \alpha u_1 - u_2 - u_3$  sean ortogonales.