UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE CARTAGENA

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Ejercicio 1. Compruébese que la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x,y,z) = \left(x^2 + yz - z^2, xy - xz + 2z^2, xyz\right)$$

es de clase C^1 en todo punto de $\mathbb{R}^3$, y calcular su matriz jacobiana y su diferencial en el punto $(3,2,1)$.

Ejercicio 2. Dadas las funciones

$$f(x,y,z) = (\sin(xy+z), (1+x^2)^{yz}) \quad \text{y} \quad g(u,v) = (u + e^v, v + e^u),$$

calcúlese la matriz jacobiana de f en el punto $(1,-1,1)$, la matriz jacobiana de g en el punto $(0,1/2)$ y la de $g \circ f$ en $(1,-1,1)$.

Ejercicio 3. Determínese si la función $T(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2}$ satisface la ecuación en derivadas parciales (llamada Ecuación de Laplace)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

Ejercicio 4. Determínese si existe alguna función f de clase C^2 tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x \operatorname{sen} y.$$

Ejercicio 5. Demuéstrese que cualquier función de la forma $z(x,t) = g(x+kt)$ cumple la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Ejercicio 6. La temperatura en el punto (x,y,z) de una pieza metálica sólida está dada por la fórmula $f(x,y,z) = e^{2x+y+3z}$ grados. ¿En qué dirección con respecto al punto $(0,0,0)$ se incrementa más rápidamente la temperatura?

Ejercicio 7. Estúdisese la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \sin x}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0). \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ejercicio 8. Estúdiese la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0). \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ejercicio 9. Estúdiese diferenciabilidad de f en $(0,0)$ y en caso de ser diferenciable calcúlese su matriz jacobiana

$$f(x,y) = \begin{cases} (e^{x+y}, \sin(x-y), x^2\sin(1/x)) & \text{si} \quad x \neq 0. \\ (e^y, -\sin y, 0) & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 10. Calcúlese el plano tangente al paraboloide elíptico dado por la ecuación $z = x^2 + 3y^2 + 4$ en el punto $(1,0,5)$.

Ejercicio 11. Estudiar los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones:

1. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
2. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
3. $f(x,y,z) = x^2 + xy - 3xz + 9$.
4. $f(x,y) = x\sin y$.
5. $f(x,y) = \arctan(x^3 + y^3 - 3xy) + 4$.
6. $f(x,y,z) = (x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$.

Ejercicio 12. Calcular los extremos relativos de la función $f(x,y,z) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z$ con $-\pi < x,y,z < \pi$.

Ejercicio 13. Calcular los extremos absolutos de las siguientes funciones en el dominio indicado:

1. $f(x,y) = -x^2 + xy + y^2 - 5x$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 3\}$.
2. $f(x,y) = xy^2$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
3. $f(x,y) = 4x^2 - y^2$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.
4. $f(x,y) = 4xy^2 - x^2y^2 - x^2y^3$, siendo D la región triangular cerrada en el plano xy con vértices $(0,0), (0,6)$ y $(6,0)$.
5. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$, $D = \{(x,y) : x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$.
6. $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$, $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
7. $f(x,y,z) = x + y + z$, $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 2z^2 \leq 6, 0 \leq z \leq 2\}$.
8. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 1$, $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$.

Ejercicio 14. Sea $f(x,y,z) = x + y - z$. Estudiar los extremos absolutos y relativos de f con las condiciones

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{6} = 1 \quad , \quad x + y - 1 = 0.$$

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE CARTAGENA

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Ejercicio 1 *Determínese cuales de los siguientes conjuntos son abiertos y cuales son cerrados:*

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1\}$.
3. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0\}$.
4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x} > 1\}$.
5. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\}$.
6. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2\}$.
7. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
8. $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x} \leq 1\}$.
9. $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 > 1\}$.
10. $J = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \geq 2\}$.
11. $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} \leq 1\}$.
12. $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} < 1 \text{ y } x > 0\}$.

Ejercicio 2 Estudiar en cada caso la continuidad de la función

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

en donde $f(x,y)$ viene dada por

1. $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$.
2. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
3. $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.
4. $f(x,y) = \dfrac{x^3+xy}{x^2+y^2}$.
5. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2+y^4}$.
6. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.
7. $f(x,y) = \dfrac{x^2(x-y)}{x^2+y^2}$.
8. $f(x,y) = x + x^2y^2 \operatorname{sen}(y/x)$.
9. $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$.
10. $f(x,y) = \dfrac{x \operatorname{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.
11. $f(x,y) = \dfrac{x \operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.
12. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2+2}{x+y+1}$.

19.3 ACTIVIDADES DE APLICACION

Actividad 19.3.1 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\text{(a) } y' + 2y = e^{-x}. \quad \text{(b) } y' - 2xy = x. \quad \text{(c) } xy' + 2y = \sin x.$$
$$\text{(d) } y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}. \quad \text{(e) } xy' = \sqrt{1-y^2}. \quad \text{(f) } y' + y^2 \sin x = 0.$$

Actividad 19.3.2 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\text{(a) } 2x + 3 + (2y-2)\,y' = 0. \qquad \text{(b) } e^x \sin y + 3y - (3x - e^x \sin y)\,y' = 0.$$
$$\text{(c) } 2xy^2 + 2y + (2x^2y + 2x)\,y' = 0. \qquad \text{(d) } 3xy + y^2 + (x^2 + xy)\,y' = 0.$$
$$\text{(e) } y + (2x - ye^y)\,y' = 0. \qquad \text{(f) } 3x^2y + 2xy + y^3 = -(x^2+y^2)\,y'.$$

Actividad 19.3.3 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\text{(a) } y + (2xy - e^{-2y})\,y' = 0. \quad \text{(b) } y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}. \quad \text{(c) } y' = \frac{x+y}{x}.$$
$$\text{(d) } x - y = (x+3y)\,y'. \quad \text{(e) } y' = \frac{2x+y-1}{2x+y+2}. \quad \text{(f) } y' = \frac{2y-x+5}{2x-y-4}.$$

Actividad 19.3.4 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\text{(a) } y' = \cos(x+y). \qquad \text{(b) } y' + \tfrac{y}{x+1} - \tfrac{1}{2}(x+1)^3\,y^2.$$
$$\text{(c) } xy' + y = y^2 \log x. \qquad \text{(d) } 3xy' - 2y = x^3y^{-3}.$$
$$\text{(e) } \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,y' = 0. \qquad \text{(f) } y' = e^{x+y}.$$
$$\text{(g) } y + e^x = y' \qquad \text{(h) } bx + cy + (ax+by)\,y' = 0.$$

Actividad 19.3.5 Resolver los problemas de condiciones iniciales siguientes:

$$\text{(a) } \begin{cases} x + y\cos x = -y'\sin x \\ y(0) = 2. \end{cases} \qquad \text{(b) } \begin{cases} y' = \dfrac{y^3}{1-2xy^2} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$
$$\text{(c) } \begin{cases} x + ye^{-x}y' = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases} \qquad \text{(d) } \begin{cases} \dfrac{2x}{y + x^2y} = y' \\ y(0) = 2. \end{cases}$$
$$\text{(e) } \begin{cases} y' - y = 2xe^{2x} \\ y(0) = 1. \end{cases} \qquad \text{(f) } \begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$
$$\text{(g) } \begin{cases} xy' + 2y = \sin x \\ y(\pi/2) = 1. \end{cases} \qquad \text{(h) } \begin{cases} y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{\cos x}{x^2} \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Actividad 19.3.6 El isótopo radioactivo del Torio 234 se desintegra a una rapidez proporcional a la cantidad existente en ese instante de tiempo. Si 100 miligramos de este material se reducen a 82.04 miligramos en un semana, ¿cuánto Torio tendremos al cabo de tres semanas? ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que la cantidad de Torio se reduzca a la mitad?

Actividad 19.3.7 Supóngase que se deposita un millón de pesetas en un banco que paga un interés del 6% al año. Calcular la cantidad de dinero que se tendrá al cabo de 3 años y medio.

Actividad 19.3.8 Supongamos que decidís matar al profesor de fundamentos matemáticos de la ingeniería. Una vez perpetrado el hecho, se encuentra el cuerpo en el despacho del mismo que está a una temperatura de 20^0C a las 6 de la tarde. La temperatura corporal de cadáver era de 35^0C en dicho momento. Una hora más tarde la temperatura era de 33^0C. ¿A qué hora se produjo el horripilante y brutal suceso?

Actividad 19.3.9 Hallar las curvas que verifican cada una de las siguientes propiedades geométricas:

(a) La distancia de un punto de la curva al origen es igual a la longitud del segmento de la normal en el punto delimitado por el propio punto y el eje OX.

(b) La proyección sobre el eje OX de la parte de la normal en (x, y) delimitada por (x, y) y el eje OX es 1.

(c) La proyección sobre el eje OX de la parte tangente entre (x, y) y el eje OX tiene longitud 1.

(d) La distancia del origen a cada tangente es igual a la abcisa del punto de tangencia correspondiente.

Actividad 19.3.10 Entre los alumnos de esta asignatura se extiende el rumor de que el examen de problemas va a ser muy difícil. Si hay 1000 alumnos de dicha asignatura y el rumor se extiende de manera proporcional al número de alumnos que todavía no lo han oído, ¿cuántos días tardarán en saberlo 950 alumnos sabiendo que a los dos días lo sabían 850 alumnos?

Actividad 19.3.11 Un tanque contiene inicialmente V_0 galones de solución salina que contiene a Kg. de sal. Otra solución salina que contiene b Kg. de sal por galón se vierte en el tanque a la razón de $e\frac{gal}{\min}$ mientras que simultáneamente, la solución bien mezclada sale del tanque a razón de $f\frac{gal}{\min}$. Encontrar la cantidad de sal que hay en el tanque en un momento t.

20.3 ACTIVIDADES DE APLICACION

Actividad 20.3.1 Dada la ecuación lineal no homogénea de orden n

$$y^{n)} + p_{n-1}(x)y^{n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x),$$

y dadas dos soluciones de la misma z e y, comprobar que la función $z - y$ es solución de la ecuación lineal homogénea

$$y^{n)} + p_{n-1}(x)y^{n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0.$$

Actividad 20.3.2 Resolver las siguientes ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes:

(a) $y'' + y' - 2y = 0$ (b) $y'' - y' - 2y = 0$
(c) $y'' - 2y' + y = 0$ (d) $y'' - 4y' - 12y = 0$
(e) $4y'' + 4y' + y = 0$ (f) $y^{3)} - y'' + 2y' - 2y = 0$
(g) $y^{4)} + y'' - 2y = 0$ (h) $y^{6)} - 3y'' + 2y = 0$.

Actividad 20.3.3 Calcular las soluciones de las siguientes ecuaciones homogéneas con coeficientes variables: ·

(a) $x^2y'' + 2xy' = 0$ con $y_1(x) = 1$.

(b) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ con $y_1(x) = x$.

(c) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ con $y_1(x) = x^{-1}$.

(d) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$ con $y_1(x) = x$.

Actividad 20.3.4 Resolver las siguientes ecuaciones no homogéneas:

(a) $y'' + y' - 2y = e^x$ (b) $y'' - y' - 2y = \cos x$
(c) $y'' - 2y' + y = 1$ (d) $y'' + 2y' + y = x^2$
(e) $y'' + 2y' - 3y = x^3$ (f) $4y'' + 4y' + y = xe^x$
(g) $y'' + 2y' + y = x\cos 2x$ (h) $y'' + 6y' + 13y = \sin 3x$
(i) $y'' + 4y = e^{2x}$ (j) $y'' + 4y' + 5y = e^x \cos x$
(k) $y'' - 2y' + 6y = e^x + x$ (l) $y^{3)} - y'' + 2y' - 2y = x$.

Actividad 20.3.5 Resolver los siguientes problemas de condiciones iniciales:

(a) $\left.\begin{array}{l} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 2. \end{array}\right\}$ (b) $\left.\begin{array}{l} y'' - y' - 2y = \cos x \\ y(0) = 1, y'(0) = -1. \end{array}\right\}$

(c) $\left.\begin{array}{l} y'' - 2y' + y = 1 \\ y(1) = 0, y'(1) = 0. \end{array}\right\}$ (d) $\left.\begin{array}{l} y'' + y = \sin x \\ y(0) = 1, y'(0) = -1. \end{array}\right\}$

(e) $\left.\begin{array}{l} y'' + 2y' + y = x^2 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{array}\right\}$ (f) $\left.\begin{array}{l} y'' - 4y' - 12y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array}\right\}$

(g) $\left.\begin{array}{l} y^{3)} - y'' + 2y' - 2y = x \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1. \end{array}\right\}$ (h) $\left.\begin{array}{l} y'' + 4y' + y = 1 - x^2 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{array}\right\}$